

コンパクト生成三角圏に対する Brown の表現定理*

@paper3510mm[†]

2020 年 12 月 19 日

概要

コンパクト生成三角圏 \mathcal{T} 上の反変関手 $F: \mathcal{T}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ に対して、これがコホモロジー的であって余積を積にうつすとき、 F は表現可能であることが知られている (Brown の表現定理). 本稿ではこの定理を証明する.

目次

1	コンパクト生成三角圏	1
2	Brown の表現定理	5
3	応用	10
4	結びに	11

1 コンパクト生成三角圏

圏はすべて locally small とし、極限や余極限は小さい圏上の図式に対してしか考えない. 三角圏 \mathcal{T} のシフト関手を Σ で表す. 三角圏などの圏の余積はすべて記号 \coprod を用いる. 三角圏の基本事項については [Nee01] や [中岡 15] を参照のこと.

定義 1.1 (コホモロジー的関手). 三角圏 \mathcal{T} からアーベル圏 \mathcal{A} への加法関手 $F: \mathcal{T}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}$ がコホモロジー的 (cohomological) であるとは、 \mathcal{T} の任意の完全三角

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \Sigma X$$

に対して誘導される \mathcal{A} の系列

$$\dots \rightarrow F^{i+1}(X) \rightarrow F^i(Z) \rightarrow F^i(Y) \rightarrow F^i(X) \rightarrow F^{i-1}(Z) \rightarrow F^{i-1}(Y) \rightarrow \dots$$

が長完全列になるときをいう. ただし $F^i = F \circ \Sigma^i$ である. 加法関手 $F: \mathcal{T} \rightarrow \text{Ab}$ の場合はホモロジー的 (homological) であるという.

* 本稿は、りす. さんによる Math Advent Calender 2020 (<https://adventar.org/calendars/5029>) の 19 日目の記事です.

[†] Twitter: <https://twitter.com/paper3510mm>.

例 1.2. 三角圏 \mathcal{T} の対象 X に対して, 反変関手 $\mathrm{Hom}(-, X): \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ はコホモロジー的であり, 共変関手 $\mathrm{Hom}(X, -): \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Ab}$ はホモロジー的である.

定義 1.3 (コンパクト対象). \mathcal{T} を余積を持つ三角圏とする. 対象 $C \in \mathcal{T}$ がコンパクト (*compact*) であるとは, 関手 $\mathrm{Hom}(C, -): \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Ab}$ が余積を保つときをいう.

補題 1.4. \mathcal{T} を余積を持つ三角圏とする. $C \in \mathcal{T}$ がコンパクトであるとき, ΣC もコンパクトである.

Proof. $\Sigma: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ は圏同値関手だから $\mathrm{Hom}(\Sigma C, -) \cong \mathrm{Hom}(C, \Sigma(-))$ が成り立ち, Σ も $\mathrm{Hom}(C, -)$ も余積を保つから ΣC はコンパクトである. \square

定義 1.5 (コンパクト生成三角圏). \mathcal{T} を余積を持つ三角圏とする. \mathcal{T} の対象から成る集合 S がコンパクト生成集合であるとは,

- (i) すべての $C \in S$ はコンパクトである
- (ii) 対象 $X \in \mathcal{T}$ について, すべての $C \in S$ に対して $\mathrm{Hom}(C, X) = 0$ であるならば $X = 0$ となる.
- (iii) S はシフト関手で閉じる.

をみたすときをいう. \mathcal{T} がコンパクト生成集合 S を持つとき, \mathcal{T} はコンパクト生成 (*compactly generated*) であるという.

注意 1.6. 余積を持つ三角圏 \mathcal{T} が対象から成る集合 S' が定義 1.5 の条件 (i), (ii) をみたすとき,

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma^n(S')$$

と置けば, 補題 1.4 より S もコンパクト対象から成る集合になり, \mathcal{T} は S によってコンパクト生成されることがわかる. したがって余積を持つ三角圏 \mathcal{T} がコンパクト生成であることを確認するためには定義 1.5 の条件 (i), (ii) をみたす対象の集合 S' が存在することを確認すれば十分である.

例 1.7.

- (i) 単位的環 R に対して, 右 R -加群の導来圏 $D(\mathrm{Mod}(R))$ はコンパクト生成である.
- (ii) 準コンパクト分離的スキーム X に対して, X 上の準連接層の導来圏 $D(\mathrm{Qcoh}(X))$ はコンパクト生成である ([Nee96, Prop. 2.5]).
- (iii) dg 圏 \mathcal{A} に対して, その導来圏 $D(\mathcal{A})$ はコンパクト生成である. 逆にすべてのコンパクト生成な代数的三角圏は, ある dg 圏 \mathcal{A} の導来圏 $D(\mathcal{A})$ と三角圏同値になる ([Kel94, Thm. 4.3]).

三角圏のホモトピー余極限を復習する。

三角圏において余極限を考えるにはどうすればよいだろうか。通常の意味での coequalizer はたいていの三角圏において存在しない。その代わりに、アーベル圏での核・余核に対応する錐 (cone) が存在するから、錐ひいては完全三角を用いて余極限の代替物を考えることができる。例えばアーベル群の圏 \mathbf{Ab} での系列

$$\{X_i\}_{i \geq 0}: \quad X_0 \xrightarrow{x_0} X_1 \xrightarrow{x_1} X_2 \xrightarrow{x_2} \dots$$

を考える。 \mathbf{Ab} での余積 $\coprod_{i \geq 0} X_i$ の標準的な射を $\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_{i \geq 0} X_i$ とし、 $\{\iota_{i+1} \circ x_i: X_i \rightarrow \coprod_{i \geq 0} X_i\}_{i \geq 0}$ から余積の普遍性により得られる射を $\bar{x}_i: \coprod_{i \geq 0} X_i \rightarrow \coprod_{i \geq 0} X_i$ とする。このとき系列 $\{X_i\}_{i \geq 0}$ の余極限 $\text{colim}_i X_i$ は、

$$\coprod_{i \geq 0} X_i \xrightarrow[\bar{x}_i]{1} \coprod_{i \geq 0} X_i$$

の coequalizer に一致する。このことから、三角圏でのホモトピー余極限を次のように定義する。

定義 1.8 (ホモトピー余極限). \mathcal{T} を余積を持つ三角圏とし、

$$X_0 \xrightarrow{x_0} X_1 \xrightarrow{x_1} X_2 \xrightarrow{x_2} \dots$$

を \mathcal{T} での対象の系列とする。余積 $\coprod_{i \geq 0} X_i$ についての標準的な射を $\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_{i \geq 0} X_i$ とし、 $\{\iota_{i+1} \circ x_i: X_i \rightarrow \coprod_{i \geq 0} X_i\}_{i \geq 0}$ から余積の普遍性により得られる射を $\bar{x}_i: \coprod_{i \geq 0} X_i \rightarrow \coprod_{i \geq 0} X_i$ とする。すなわち \bar{x}_i は $\bar{x}_i \circ \iota_i = \iota_{i+1} \circ x_i$ をみたす射である。このとき射 $1 - \bar{x}_i: \coprod_{i \geq 0} X_i \rightarrow \coprod_{i \geq 0} X_i$ に対して、

$$\prod_{i \geq 0} X_i \xrightarrow{1 - \bar{x}_i} \prod_{i \geq 0} X_i \xrightarrow{h} \text{hocolim}_i X_i \longrightarrow \Sigma \left(\prod_{i \geq 0} X_i \right)$$

が完全三角になるとき、対象 $\text{hocolim}_i X_i$ を系列 $\{X_i\}_{i \geq 0}$ のホモトピー余極限 (*homotopy colimit*) という。ホモトピー余極限は標準的ではない同型を除いて一意的である。

ホモトピー余極限 $\text{hocolim}_i X_i$ を一つ選んだとき、標準的に

$$\begin{array}{ccc} X_i & & \\ \iota_i \downarrow & \searrow h_i & \\ \coprod_{i \geq 0} X_i & \xrightarrow{h} & \text{hocolim}_i X_i \end{array}$$

が可換になる射 $h_i: X_i \rightarrow \text{hocolim}_i X_i$ が存在する。このとき

$$h_{i+1} \circ x_i = h \circ \iota_{i+1} \circ x_i = h \circ \bar{x}_i \circ \iota_i = h \circ \iota_i = h_i$$

となる. よって $f_0 = 0$ かつ $f_i = \Sigma x_{i-1} \circ f_{i-1}$ ($i \geq 1$) が成り立ち, $f = \sum_i f_i = 0$ となる. したがって $-(1 - \overline{\Sigma x_i} \circ -)$ は単射で, $(-\Sigma(1 - \overline{x_i})) \circ -$ も単射になる.

よって完全列 (*) から

$$\mathrm{Hom}\left(C, \prod_{i \geq 0} X_i\right) \xrightarrow{(1 - \overline{x_i}) \circ -} \mathrm{Hom}\left(C, \prod_{i \geq 0} X_i\right) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}(C, \mathrm{hocolim}_i X_i) \longrightarrow 0$$

が完全になる. 再び $C \in \mathcal{T}$ がコンパクトであるから

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\left(C, \prod_{i \geq 0} X_i\right) & \xrightarrow{(1 - \overline{x_i}) \circ -} & \mathrm{Hom}\left(C, \prod_{i \geq 0} X_i\right) \\ \cong \uparrow & & \cong \uparrow \\ \prod_{i \geq 0} \mathrm{Hom}(C, X_i) & \xrightarrow{1 - \overline{x_i} \circ -} & \prod_{i \geq 0} \mathrm{Hom}(C, X_i) \end{array}$$

が可換になる. このとき射 $1 - \overline{x_i} \circ -$ の余核が余極限 $\mathrm{colim}_i \mathrm{Hom}(C, X_i)$ になることから, 同型 $\mathrm{colim}_i \mathrm{Hom}(C, X_i) \cong \mathrm{Hom}(C, \mathrm{hocolim}_i X_i)$ が成り立つ. \square

2 Brown の表現定理

コンパクト生成な三角圏に対して Brown の表現定理が成り立つことを証明する. 証明は [Nee96] を参考にした.

定義 2.1 (局所化部分圏). \mathcal{T} を余積を持つ三角圏とする. 同型で閉じる充満三角部分圏 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ が局所化部分圏 (localizing subcategory) であるとは, \mathcal{S} が \mathcal{T} での余積を取る操作で閉じるときをいう. \mathcal{T} の対象の集合 S に対して, S を含む最小の局所化部分圏を $\mathrm{Loc}(S)$ で表す.

以降, 三角圏の部分圏は充満かつ同型で閉じることを仮定する.

次の補題が本質的である.

補題 2.2. \mathcal{T} を (余積を持つ) コンパクト生成な三角圏とし, S をそのコンパクト生成集合とする. コホモロジー的関手 $F: \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ について, F は余積を積にうつす, すなわち \mathcal{T} の任意の余積 $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に対して標準的な射

$$F\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\right) \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} F(X_\lambda)$$

が \mathbf{Ab} の同型射であるとする. このとき, \mathcal{T} の系列

$$X_0 \xrightarrow{\tau_0} X_1 \xrightarrow{\tau_1} X_2 \xrightarrow{\tau_2} \dots$$

と対象 $X \in \mathcal{T}$ と自然変換 $\phi: \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X) \rightarrow F$ であって

- $X \cong \mathrm{hocolim}_i X_i$ である
- 各 $i \geq 0$ に対して, $X_i \in \mathrm{Loc}(S)$ である. 特に $X \in \mathrm{Loc}(S)$ も成り立つ

- 各 $C \in S$ に対して, $\phi(C): \text{Hom}(C, X) \rightarrow F(C)$ は同型射である
をみたすものが存在する.

Proof. いくつかの Step に分けて考える.

(Step 1): まず, 対象 $X_0 \in \text{Loc}(S)$ と自然変換 $\phi_0: \text{Hom}(-, X_0) \rightarrow F$ を構成する. 集合 U_0 を

$$U_0 := \bigcup_{C \in S} F(C) = \{(C, \alpha) \mid C \in S, \alpha \in F(C)\}$$

と定め,

$$X_0 := \prod_{(C, \alpha) \in U_0} C$$

と置く. $C \in S$ より $X_0 \in \text{Loc}(S)$ である. F は余積を積にうつすから同型

$$F(X_0) = F\left(\prod_{(C, \alpha) \in U_0} C\right) \cong \prod_{(C, \alpha) \in U_0} F(C)$$

が成り立つ. この同型において, (C, α) 成分が α であるような元 $(\alpha)_{(C, \alpha)} \in \prod_{(C, \alpha) \in U_0} F(C)$ に
対応する $F(X_0)$ の元を $\alpha_0 \in F(X_0)$ とする. このとき米田の補題より自然変換

$$\phi_0: \text{Hom}(X_0) \rightarrow F$$

が得られる.

ここで, 余積の標準的な射を $\iota_{(C, \alpha)}: C \rightarrow \prod_{(C, \alpha) \in U_0} C$, 積の標準的な射を $\pi_{(C, \alpha)}: \prod_{(C, \alpha) \in U_0} F(C) \rightarrow F(C)$ とすれば,

$$\begin{array}{ccc} F(X_0) & \xrightarrow{\cong} & \prod_{(C, \alpha) \in U_0} F(C) \\ & \searrow F(\iota_{(C, \alpha)}) & \downarrow \pi_{(C, \alpha)} \\ & & F(C) \end{array}$$

が可換であることから $F(\iota_{(C, \alpha)})(\alpha_0) = \alpha$ となる. ϕ_0 が米田の補題で α_0 に対応することから,
 $\phi_0(C)(\iota_{(C, \alpha)}) = F(\iota_{(C, \alpha)})(\alpha_0)$ が成り立つので, 自然変換 ϕ_0 は

$$\forall C \in S, \quad \phi_0(C): \text{Hom}(C, X_0) \rightarrow F(C) \text{ は全射}$$

をみたすことがわかる.

(Step 2): 次に, Step 1 で得た X_0 と ϕ_0 から, 対象 $X_i \in \text{Loc}(S)$ と自然変換 $\phi_i: \text{Hom}(-, X_i) \rightarrow F$ を帰納的に構成していく. $i \geq 0$ に対して, 対象 $X_i \in \text{Loc}(S)$ と自然変換 $\phi_i: \text{Hom}(-, X_i) \rightarrow F$ が得られたとする. 集合 U_{i+1} を

$$\begin{aligned} U_{i+1} &:= \bigcup_{C \in S} \text{Ker}(\text{Hom}(C, X_i) \xrightarrow{\phi_i(C)} F(C)) \\ &= \{(C, f) \mid C \in S, f: C \rightarrow X_i \text{ であって } \phi_i(C)(f) = 0 \text{ となるもの}\} \end{aligned}$$

と定め, $K_{i+1} := \coprod_{(C,\alpha) \in U_{i+1}} C$ と置く. $C \in S$ より $K_{i+1} \in \text{Loc}(S)$ である. $(C, f) \in U_{i+1}$ に対して $\rho_{(C,f)} = f: C \rightarrow X_i$ とすると, 射の族 $\{\rho_{(C,f)}\}_{(C,f)}$ に対して余積の普遍性により

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ \downarrow \iota_{(C,f)} & \searrow \rho_{(C,f)}=f & \\ K_{i+1} & \xrightarrow{\sigma_i} & X_i \end{array}$$

なる射 σ_i が一意的存在する. 三角圏 \mathcal{T} において完全三角

$$K_{i+1} \xrightarrow{\sigma_i} X_i \xrightarrow{\tau_i} X_{i+1} \rightarrow \Sigma(K_{i+1})$$

をとると, $K_{i+1}, X_i \in \text{Loc}(S)$ より $X_{i+1} \in \text{Loc}(S)$ である.

米田の補題により $\phi_i: \text{Hom}(-, X_i) \rightarrow F$ は $\alpha_i := \phi_i(X_i)(\text{id}_{X_i}) \in F(X_i)$ に対応する. ここで図式

$$\begin{array}{ccc} F(X_i) & \xrightarrow{F(\sigma_i)} & F(K_{i+1}) = F\left(\coprod_{(C,\alpha) \in U_{i+1}} C\right) \xrightarrow{\cong} \prod_{(C,f) \in U_{i+1}} F(C) \\ & & \searrow F(\iota_{(C,f)}) \quad \downarrow \pi_{(C,f)} \\ & & F(C) \end{array}$$

を考えたとき, 各 $(C, f) \in U_{i+1}$ について

$$\begin{aligned} F(\iota_{(C,f)})(F(\sigma_i)(\alpha_i)) &= F(\sigma_i \circ \iota_{(C,f)})(\alpha_i) = F(\rho_{(C,f)})(\alpha_i) \\ &= F(f)(\alpha_i) = \phi_i(C)(f) = 0 \end{aligned}$$

となるから, $F(\sigma_i)(\alpha_i) = 0$ がわかる. F はコホモロジー的であるから

$$F(X_{i+1}) \xrightarrow{F(\tau_i)} F(X_i) \xrightarrow{F(\sigma_i)} F(K_{i+1})$$

は完全列であり, $F(\tau_i)(\alpha_{i+1}) = \alpha_i$ となる $\alpha_{i+1} \in F(X_{i+1})$ が存在する. よって米田の補題により α_{i+1} に対応して自然変換

$$\phi_{i+1}: \text{Hom}(-, X_{i+1}) \rightarrow F$$

を得る. 米田の補題での同型の自然性から, $F(\tau_i)(\alpha_{i+1}) = \alpha_i$ より

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(-, X_i) & & \\ \downarrow \tau_i \circ - & \searrow \phi_i & \\ \text{Hom}(-, X_{i+1}) & \xrightarrow{\phi_{i+1}} & F \end{array}$$

が可換になる.

(Step 3): さて, X_i の構成から \mathcal{T} における系列

$$X_0 \xrightarrow{\tau_0} X_1 \xrightarrow{\tau_1} X_2 \xrightarrow{\tau_2} \dots$$

が得られた。この系列のホモトピー余極限を $X = \text{hocolim}_i X_i$ と置く。 $X_i \in \text{Loc}(S)$ より $X \in \text{Loc}(S)$ である。このとき自然変換 $\phi: \text{Hom}(-, X) \rightarrow F$ を以下のように構成する。三角圏 \mathcal{T} での完全三角

$$\prod_{i \geq 0} X_i \xrightarrow{1 - \bar{\tau}_i} \prod_{i \geq 0} X_i \xrightarrow{h} X \longrightarrow \Sigma \left(\prod_{i \geq 0} X_i \right)$$

をコホモロジー的関手 F でうつして、上辺が完全列である可換図式

$$\begin{array}{ccc} F(X) \xrightarrow{F(h)} F\left(\prod_{i \geq 0} X_i\right) \xrightarrow{F(1 - \bar{\tau}_i)} F\left(\prod_{i \geq 0} X_i\right) \\ \downarrow \cong \quad \quad \quad \downarrow \cong \\ \prod_{i \geq 0} F(X_i) \xrightarrow{1 - \widetilde{F(\tau_i)}} \prod_{i \geq 0} F(X_i) \end{array}$$

が得られる。ここで射 $\widetilde{F(\tau_i)}: \prod_{i \geq 0} F(X_i) \rightarrow \prod_{i \geq 0} F(X_i)$ は

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \geq 0} F(X_i) & \xrightarrow{\widetilde{F(\tau_i)}} & \prod_{i \geq 0} F(X_i) \\ \pi_{i+1} \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ F(X_{i+1}) & \xrightarrow{F(\tau_i)} & F(X_i) \end{array}$$

を可換にする一意的な射である。このとき $(\alpha_i)_i \in \prod_{i \geq 0} F(X_i)$ を考えると

$$(1 - \widetilde{F(\tau_i)})(\alpha_i)_i = (\alpha_i)_i - (F(\tau_i)(\alpha_{i+1}))_i = (\alpha_i)_i - (\alpha_i)_i = 0$$

となるから、完全性によりある元 $\alpha \in F(X)$ であって

$$F(X) \xrightarrow{F(h)} F\left(\prod_{i \geq 0} X_i\right) \cong \prod_{i \geq 0} F(X_i); \quad \alpha \mapsto (\alpha_i)_i$$

となるものが存在する。米田の補題により $\alpha \in F(X)$ に対応して自然変換

$$\phi: \text{Hom}(-, X) \longrightarrow F$$

が得られる。構成から $F(h_i)(\alpha) = \pi_i((\alpha_i)_i) = \alpha_i$ となるので、米田の補題の同型の自然性により

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(-, X_i) & & \\ \downarrow h_i \circ - & \searrow \phi_i & \\ \text{Hom}(-, X) & \xrightarrow{\phi} & F \end{array}$$

が可換になる。

(Step 4): 最後に、Step 3 でつくった自然変換 $\phi: \text{Hom}(-, X) \rightarrow F$ について、

$$\forall C \in S, \quad \phi(C): \text{Hom}(C, X) \rightarrow F(C) \text{ は同型射}$$

であることを示す. $C \in S$ に対して, Step 3 より $\phi(C) \circ (h_i \circ -) = \phi_0(C)$ が成り立つが, Step 1 より $\phi_0(C)$ は全射であるから, $\phi(C)$ も全射である. よって $\phi(C)$ が単射であることを示せばよい.

任意の $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(C, X)$ に対して $\phi(C)(f) = 0$ であるとする. $C \in S$ はコンパクトだから, 命題 1.9 より同型 $\text{colim}_i \text{Hom}(C, X_i) \cong \text{Hom}(C, \text{hocolim}_i X_i) = \text{Hom}(C, X)$ が成り立つ. 余極限の構成から全射 $\coprod_{i \geq 0} \text{Hom}(C, X_i) \rightarrow \text{colim}_i \text{Hom}(C, X_i)$ が存在し, これは

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(C, X_i) & \xrightarrow{h_i \circ -} & \\ \downarrow \iota_i & & \\ \coprod_{i \geq 0} \text{Hom}(C, X_i) & \longrightarrow & \text{colim}_i \text{Hom}(C, X_i) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(C, X) \end{array}$$

を可換にする. 底の射は全射だから, ある $\sum_i g_i \in \coprod_{i \geq 0} \text{Hom}(C, \Sigma X_i)$ (ただし有限個の i を除いて $g_i = 0$) が存在して $\sum_i g_i \mapsto f$ となる. $g_i \neq 0$ となる最大の i をとれば, ある $f_i \in \text{Hom}(C, X_i)$ が存在して $f = h_i \circ f_i$ が成り立つことがわかる. このとき

$$\phi_i(C)(f_i) = \phi(C)(h_i \circ f_i) = \phi(C)(f) = 0$$

となるから, $C \in S$ と $f_i: C \rightarrow X_i$ は集合 U_{i+1} の元 $(C, f_i) \in U_{i+1}$ を定める. 特に $f_i = \rho_{(C, f_i)} = \sigma_i \circ \iota_{(C, f_i)}$ であるから

$$\tau_i \circ f_i = \tau_i \circ \sigma_i \circ \iota_{(C, f_i)} = 0 \circ \iota_{(C, f_i)} = 0$$

となる. したがって

$$f = h_i \circ f_i = h_{i+1} \circ \tau_i \circ f_i = h_{i+1} \circ 0 = 0$$

が成り立ち, $\phi(C)$ が単射であることがわかる.

以上より $C \in S$ に対し $\phi(C)$ は同型射である. □

系 2.3. \mathcal{T} をコンパクト生成な三角圏とし, S をそのコンパクト生成集合とする. このとき, $\text{Loc}(S) = \mathcal{T}$ である.

Proof. 任意の $Z \in \mathcal{T}$ をとる. 余積を積にうつすコホモロジー的関手 $\text{Hom}(-, Z): \mathcal{T}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ に対して, 補題 2.2 を適用すると, 対象 $X \in \text{Loc}(S)$ と自然変換 $\phi: \text{Hom}(-, X) \rightarrow \text{Hom}(-, Z)$ であって

$$\forall C \in S, \quad \phi(C): \text{Hom}(C, X) \rightarrow \text{Hom}(C, Z) \text{ は同型}$$

となるものが取れる. ここで米田の補題より ϕ に対応する元を $k \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Z)$ とすると, $\phi = k \circ -$ である. 三角圏 \mathcal{T} において完全三角

$$X \xrightarrow{k} Z \rightarrow Y \rightarrow \Sigma(X)$$

をとれば, 各 $C \in S$ に対して完全列

$$\text{Hom}(C, X) \xrightarrow[k \circ -]{\cong} \text{Hom}(C, Z) \rightarrow \text{Hom}(C, Y) \rightarrow \text{Hom}(C, \Sigma(X)) \xrightarrow[k \circ -]{\cong} \text{Hom}(C, \Sigma(Z))$$

が得られ, $\text{Hom}(C, Y) = 0$ が成り立つ. S は \mathcal{T} のコンパクト生成集合であるから $Y = 0$ が従い, よって $k: X \rightarrow Z$ は同型射である. $X \in \text{Loc}(S)$ だから $Z \in \text{Loc}(S)$ となり, したがって $\text{Loc}(S) = \mathcal{T}$ が成り立つ. \square

定理 2.4 (Brown の表現定理). \mathcal{T} をコンパクト生成な三角圏とする. 加法関手 $F: \mathcal{T}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ に対して, 次は同値である.

- (i) F は表現可能である.
- (ii) F はコホモロジー的で, かつ \mathcal{T} の余積を Ab の積にうつす.

Proof. (i) \Rightarrow (ii): 明らか.

(ii) \Rightarrow (i): S を \mathcal{T} のコンパクト生成集合とする. 補題 2.2 により, 対象 $X \in \text{Loc}(S)$ と自然変換 $\phi: \text{Hom}(-, X) \rightarrow F$ であって

$$\forall C \in S, \quad \phi(C): \text{Hom}(C, X) \rightarrow F(C) \text{ は同型}$$

となるものが取れる. \mathcal{T} の部分圏 \mathcal{T}' を

$$\mathcal{T}' = \{Y \in \mathcal{T} \mid \text{すべての } n \in \mathbb{Z} \text{ について } \phi(\Sigma^n Y): \text{Hom}(\Sigma^n Y, X) \rightarrow F(\Sigma^n Y) \text{ が同型射}\}$$

と定めると, \mathcal{T}' は \mathcal{T} の三角部分圏で, \mathcal{T} の余積で閉じ, S を含む. 特に $\text{Loc}(S) \subseteq \mathcal{T}'$ である. したがって系 2.3 により $\text{Loc}(S) = \mathcal{T}' = \mathcal{T}$ が成り立つから, ϕ は自然同型 $\text{Hom}(-, X) \cong F$ を与え, F は表現可能である. \square

3 応用

Brown の表現定理の主な応用は, 三角圏に対する随伴関手定理の成立と積の存在である.

定理 3.1. \mathcal{S}, \mathcal{T} を三角圏とし, \mathcal{S} はコンパクト生成であるとする. 三角関手 $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ が余積を保つとき, F は右随伴関手 $G: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ を持つ.

Proof. 各対象 $Y \in \mathcal{T}$ に対して, 関手

$$\mathcal{S}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}; \quad X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{T}}(F(X), Y)$$

を考えると, これはコホモロジー的関手で, \mathcal{S} の余積を Ab の積にうつす. よって Brown の表現定理 2.4 より表現可能であり, ある対象 $G(Y) \in \mathcal{S}$ が存在して X について自然な同型

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(F(X), Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, G(Y))$$

が成り立つ. このとき対応 $Y \mapsto G(Y)$ は米田の補題より関手 $G: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ を与え, F の右随伴関手になる. \square

■ **命題 3.2.** コンパクト生成な三角圏 \mathcal{T} は積を持つ.

Proof. \mathcal{T} の対象の集合 $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, 関手

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(-, Y_\lambda): \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Ab}; \quad X \mapsto \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(X, Y_\lambda)$$

を考えると, これはコホモロジー的関手で, \mathcal{T} の余積を Ab の積にうつす. よって Brown の表現定理 2.4 より表現可能であり, その表現対象が積 $\prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ である. \square

他にも, [Nee96] では Grothendieck 双対を示すことに用いられている.

4 結びに

3 節の結果は, コンパクト生成でなくても Brown の表現定理が成り立つような三角圏に対して成立する. 言い換えれば, コンパクト生成な三角圏が良い性質を持つのは, Brown の表現定理が成り立つからであるといえる. このことから “Brown の表現定理が成り立つ三角圏” という概念に注意が向く.

定義 4.1. \mathcal{T} を余積を持つ三角圏とする. \mathcal{T} が Brown の表現定理を有するとは,

(主張) 任意のコホモロジー的関手 $F: \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Ab}$ に対して, F が \mathcal{T} の余積を Ab の積にうつすならば, F は表現可能である

が成り立つときをいう.

定理 2.4 より, コンパクト生成三角圏は Brown の表現定理を有する.

このとき Brown の表現定理を有する三角圏はどんな三角圏か, と問うのは自然な流れである. Neeman [Nee01] はコンパクト生成性の定義を拡張した優良生成性 (*well-generatedness*) を導入し, 優良生成な三角圏が Brown の表現定理を有することを証明した. 直後 Krause [Kra01, Kra02] は, Brown の表現定理を導くのは優良生成性に含まれている完璧生成性 (*perfectly-generatedness*) の部分であることを見抜き, Neeman の優良生成性を完璧生成性を用いた同値な定義に言い換えるとともに, 完璧生成な三角圏が Brown の表現定理を有することを証明している. 現在では, Brown の表現定理の証明は, Krause [Kra02] による coherent 関手によるものが一般的である.

参考文献

- [Kel94] Bernhard Keller. *Deriving DG categories*. Ann. Sci. École Norm. Sup. 4, vol. 27, no. 1, 63–102, 1994.
- [Kra01] Henning Krause. *On Neeman’s well generated triangulated categories*. Doc. Math. 6, 121–126, 2001.

- [Kra02] Henning Krause. *A Brown representability theorem via coherent functors*. *Topology* 41, no. 4, 853–861, 2002.
- [Nee96] Amnon Neeman. *The Grothendieck duality theorem via Bousfield’s techniques and Brown representability*. *J. Amer. Math. Soc.* 9, no. 1, 205–236, 1996.
- [Nee01] Amnon Neeman. *Triangulated categories*. *Ann. of Math. Stud.* 148, Princeton University Press, 2001.
- [中岡 15] 中岡宏行. 『圏論の技法 – アーベル圏と三角圏でのホモロジー代数』. 日本評論社, 2015.