Gabriel-Popescu の定理

@paper3510mm*

2021 年 2 月 15 日

概要

任意の Grothendieck 圏は，ある加群圏の “良い” 部分圏として実現できることが知られている．すなわち任意の Grothendieck 圏は，加群圏の反映的充満部分圏 (包含関手が左随伴を持つ部分圏) であって，さらに包含関手の左随伴が完全関手となるような部分圏になる (Gabriel-Popescu の定理)．本稿ではこの定理を証明する．

目次

1 準備 1
2 Gabriel-Popescu の定理 3

1 準備

環は積について結合的で単位元をもつとし，可換とは限らない．また圏はすべて locally small とする．

定義 1.1. 圏 $\mathcal{I}$ がフィルター圏 (filtered category) であるとは，

(i) $\mathcal{I} \neq \emptyset$
(ii) 任意の対象 $i, j \in \mathcal{I}$ に対して，ある対象 $k \in \mathcal{I}$ と射 $i \to k, j \to k$ が存在する
(iii) 任意の射 $f, g \colon i \to j$ に対して，$h \circ f = h \circ g$ となる射 $h \colon j \to k$ が存在する

をみたすときをいう．

関手 $F \colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{I}$ が small なフィルター圏であるとき，F を filtered diagram，F の余極限を filtered colimit と呼ぶ．

順序集合 (poset) を圏とみなしたとき，フィルター圏の条件 (iii) は明らかであるから，filtered poset とは有向集合のことである．

---

* https://paper3510mm.github.io/notes.

例 1.2. 環 R に対し，右 R-加群のなすアーベル圏を $\mathsf{Mod}(R)$ とする．フィルター圏 $\mathcal{I}$ からの関手 $M\colon \mathcal{I} \to \mathsf{Mod}(R)$ があるとき，$\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i$ 上の同値関係 $\sim$ を，$x \in M_i, y \in M_j$ に対し

$$x \sim y \iff k \in \mathcal{I} \text{ と } \mu\colon i \to k \text{ と } \nu\colon j \to k \text{ が存在して } M(\mu)(x) = M(\nu)(y)$$

によって定めると，

$$\varinjlim_i M_i = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i \Big/ \sim$$

が M の filtered colimit になる．

注意 1.3. 余積をもつ圏において，任意の余積は有限余積の filtered colimit で表せる [Mac98, Ch. IX, §1, Theorem 1].

定義 1.4. 圏 $\mathcal{A}$ の対象 G が生成子 (generator) であるとは，関手 $\mathcal{A}(G,-)\colon \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$ が忠実であるときをいう．

命題 1.5. 余完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ において，次は同値である．

(i) $G \in \mathcal{A}$ は generator である．

(ii) 任意の $X \in \mathcal{A}$ に対して，ある集合 I とエピ射 $G^{\oplus I} \to X$ が存在する．

Proof. <u>(i) ⇒ (ii)</u>: $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して，合成

$$\mathcal{A}(X,Y) \xrightarrow{\mathcal{A}(G,-)} \mathrm{Hom}(\mathcal{A}(G,X), \mathcal{A}(G,Y)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(G^{\oplus \mathcal{A}(G,X)}, Y)$$

を F_{XY} とおく．特に $X \in \mathcal{A}$ に対して，$\mathrm{id}_X \in \mathcal{A}(X,X)$ の像を

$$\mathrm{ev}_X = F_{XX}(\mathrm{id}_X)\colon G^{\oplus \mathcal{A}(G,X)} \longrightarrow X$$

とおく．このとき任意の $Y \in \mathcal{A}$ に対して，$\mathcal{A}$ での完全列

$$G^{\oplus \mathcal{A}(G,X)} \xrightarrow{\mathrm{ev}_X} X \longrightarrow \mathrm{Cok}(\mathrm{ev}_X) \longrightarrow 0$$

から $\mathsf{Mod}(R)$ での完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(\mathrm{Cok}(\mathrm{ev}_X), Y) \longrightarrow \mathcal{A}(X,Y) \xrightarrow{-\circ \mathrm{ev}_X} \mathcal{A}(G^{\oplus \mathcal{A}(G,X)}, Y)$$

が得られる．ここで $F_{XY} = - \circ \mathrm{ev}_X$ に注意すれば，G が generator であることから $- \circ \mathrm{ev}_X$ は単射で，$\mathcal{A}(\mathrm{Cok}(\mathrm{ev}_X), Y) = 0$ となる．よって米田の補題より，$\mathrm{Cok}(\mathrm{ev}_X) = 0$ となり，ev_X は epi 射である．

<u>(ii) ⇒ (i)</u>: $f, g\colon X \to Y$ に対し，$f \circ - = g \circ -\colon \mathcal{A}(G,X) \to \mathcal{A}(G,Y)$ とする．集合 I と epi 射 $G^{\oplus I} \to X$ をとると，各 $i \in I$ で

$$G \xrightarrow{\iota_i} G^{\oplus I} \longrightarrow X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$$

は一致し，coproduct の普遍性から

$$G^{\oplus I} \longrightarrow X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$$

も一致する．$G^{\oplus I} \to X$ は epi 射だから，$f = g$ となり，したがって $\mathcal{A}(G, -)$ は faithful である． □

命題 1.6. アーベル圏 $\mathcal{A}$ において $G \in \mathcal{A}$ が generator であるとき，関手 $\mathcal{A}(G, -) \colon \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$ は conservative，すなわち同型射を反射する．

Proof. $\mathcal{A}$ の射 $h \colon A \to B$ に対して，$\mathcal{A}(G, h)$ が同型射であるとする．特に $\mathcal{A}(G, h)$ はモノ射かつエピ射である．$h \circ x = h \circ y$ なる射 $x, y \colon X \to A$ をとるとき，$\mathcal{A}(G, h) \circ \mathcal{A}(G, x) = \mathcal{A}(G, h) \circ \mathcal{A}(G, y)$ が成り立つが，$\mathcal{A}(G, h)$ がモノ射であることから $\mathcal{A}(G, x) = \mathcal{A}(G, y)$ となる．G が generator で $\mathcal{A}(G, -)$ は忠実であるから，$x = y$ となる．よって h はモノ射である．同様にして h がエピ射であることもわかる．したがって h は同型射である． □

注意 1.7. 実は命題 1.6 は逆も成り立つ．generator についての詳細は [KS05] や [ぺ 20] を参照のこと．

2 Gabriel-Popescu の定理

Gabriel-Popescu の定理 (定理 2.8) を証明する．

定義 2.1. アーベル圏 $\mathcal{A}$ が Grothendieck 圏であるとは，

(i) すべての余積が存在する
(ii) filtered colimit をとる関手が完全である
(iii) generator を持つ

をみたすときをいう．

アーベル圏は coequalizer をもつから，条件 (i) より Grothendieck 圏は余完備である．

例 2.2. 環 R に対して，右 R-加群のなすアーベル圏 $\mathsf{Mod}(R)$ は Grothendieck 圏である．

例 2.3. スキーム X に対して，X 上の準連接層のなすアーベル圏 $\mathsf{Qcoh}(X)$ は Grothendieck 圏である [SP, Tag 077K].

命題 2.4. $\mathcal{A}$ を余完備なアーベル圏とし，generator $G \in \mathcal{A}$ を持つとする．$R \coloneqq \mathcal{A}(G, G)$ とおくと，これは射の合成によって環となる．このとき，$\mathcal{A}(G, -)$ は関手 $T \colon \mathcal{A} \to \mathsf{Mod}(R)$ を定め，さらに左随伴 $S \colon \mathsf{Mod}(R) \to \mathcal{A}$ をもつ．

Proof. $A \in \mathcal{A}$ に対して，アーベル群 $\mathcal{A}(G, A)$ は合成により右からの $R = \mathcal{A}(G, G)$ の作用が定まる．よって $\mathcal{A}(G, -)$ は関手 $T \colon \mathcal{A} \to \mathsf{Mod}(R)$ を定める．以降 $T = \mathcal{A}(G, -)$ とかく．

$M \in \mathsf{Mod}(R)$ に対して，$S(M) \in \mathcal{A}$ を

- $M = R$ のとき，$S(R) = G$ とする．
- $M = R^{\oplus I}$ のとき，$S(R^{\oplus I}) = G^{\oplus I}$ とする．
- 一般の M のとき，free resolution

  $$R^{\oplus J} \longrightarrow R^{\oplus I} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

  を取って $S(M) = \mathrm{Cok}(\mathrm{G}^{\oplus \mathrm{J}} \to \mathrm{G}^{\oplus \mathrm{I}})$ とする：

  $$G^{\oplus J} \longrightarrow G^{\oplus I} \longrightarrow S(M) \longrightarrow 0.$$

によって定めると，これは resolution の取り方に依らない．$A \in \mathcal{A}$ に対し，完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(S(M), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G^{\oplus I}, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G^{\oplus J}, A)$$

を考えると，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G^{\oplus I}, A) \cong \prod_I T(A) \cong \prod_I \mathrm{Hom}_R(R, T(A)) \cong \mathrm{Hom}_R(R^{\oplus I}, T(A))$ であるから，

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, T(A)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R^{\oplus I}, T(A)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R^{\oplus J}, T(A))$$

と完全列として同型となり，自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(S(M), A) \cong \mathrm{Hom}_R(M, T(A))$$

が存在する．よって S は T の左随伴となる． □

注意 2.5. 命題 2.4 の随伴は，いわゆる “普遍随伴” の例である：環 R を，$G \in \mathcal{A}$ を対象に持つ $\mathcal{A}$ の部分圏と同一視すれば，$F \colon R \hookrightarrow \mathcal{A}$ を包含関手として $S = \mathrm{Lan}_{\mathsf{y}} F$，$T = \mathrm{Lan}_F \mathsf{y}$ である．普遍随伴については [alg-d] の「Kan 拡張」ないし「豊穣圏」の pdf を参照のこと．

補題 2.6. $\mathcal{A}$ を Grothendieck 圏，$\{L_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ を $\mathcal{A}$ での filtered diagram とし，$L = \varinjlim_i L_i$ とおく．射 $K \to L$ に対して，各 $i \in \mathcal{I}$ について pullback 図式

$$\begin{tikzcd} K_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & L_i \arrow[d] \\ K \arrow[r] & L \end{tikzcd}$$

を考える．ただし右辺 $L_i \to L$ は余極限に付随する標準的な射である．このとき，同型

$$K \cong \varinjlim_i K_i = \varinjlim_i (K \times_L L_i)$$

が成り立つ．

Proof. $\mathcal{A}$ は Grothendieck 圏だから，filtered colimit をとる関手 $\varinjlim_i$ は完全関手であり，特に有限極限を保つ．したがって上の pullback 図式の filered colimit をとって，pullback 図式

$$\begin{tikzcd} \varinjlim_i K_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \varinjlim_i L_i \arrow[d] \\ K \arrow[r] & L \end{tikzcd}$$

が得られる．ここで右辺の射 $\varinjlim_i L_i \to L$ は同型であるから，$\varinjlim_i K_i \cong K$ が成り立つ． □

証明の鍵となるのは次の命題である．

> **命題 2.7.** $\mathcal{A}$ を Grothendieck 圏とし，$G \in \mathcal{A}$ を generator とする．$R = \mathcal{A}(G, G)$ とおき，$T = \mathcal{A}(G, -) \colon \mathcal{A} \to \mathsf{Mod}(R)$ を考えると，命題 2.4 より T は左随伴 $S \colon \mathsf{Mod}(R) \to \mathcal{A}$ を持つ．随伴 $S \dashv T$ の同型
> $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(SM, A) \cong \mathrm{Hom}_R(M, TA) \tag{$\star$}$$
> のもとで $i \colon M \to TA$ が $f \colon SM \to A$ に対応するとき，i がモノ射ならば f もモノ射になる．

Proof. 二つのステップに分ける．

(Step 1): R の有限直和から M への準同型 $t \colon R^{\oplus n} \to M$ があるとする．$\tau = S(t) \colon G^{\oplus n} = S(R^{\oplus n}) \to SM$ と置くと，随伴 $S \dashv T$ において

$$\begin{tikzcd} G^{\oplus n} \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "f\circ\tau"'] & SM \arrow[d, "f"] \\ & A \end{tikzcd} \quad \overset{\text{adj.}}{\leftrightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} R^{\oplus n} \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "i\circ t"'] & M \arrow[d, tail, "i"] \\ & TA \end{tikzcd}$$

と図式が対応する．このとき任意の $g \colon G \to G^{\oplus n}$ に対して，

$$f \circ \tau \circ g = 0 \implies \tau \circ g = 0$$

が成り立つ．

∵) 環 R を一点プレ加法圏 $\mathcal{R}$ とみなすとき，そのただ一つの対象 $*$ を G にうつすような充満忠実関手 $F \colon \mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{A}$ が自然に存在する．米田埋め込みを $\mathsf{y} \colon \mathcal{R} \to \mathsf{Mod}(R)$ とすると，関手 S の構成から $S \circ \mathsf{y} \cong F$ が成り立つ．特に

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(R, R) \arrow[dr, "S_{RR}"] & \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(*, *) \arrow[u, "\mathsf{y}_{**}"] \arrow[r, "F_{**}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, G) \end{tikzcd}$$

が同型を除いて可換で，$S_{RR}\colon \mathrm{Hom}_R(R,R) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G,G)$ が全単射になる．このことから

$$S\colon \mathrm{Hom}_R(R, R^{\oplus n}) \cong \prod_n \mathrm{Hom}_R(R,R) \to \prod_n \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G,G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, G^{\oplus n})$$

も全単射になることに注意する．

したがって $g\colon G \to G^{\oplus n}$ を任意に取るということは，対応する $j\colon R \to R^{\oplus n}$ を任意に取るということである．随伴 $S \dashv T$ において図式が

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[rrd, bend right, "f\tau g"'] & G^{\oplus n} \arrow[r, "\tau"] \arrow[rd, "f\tau"'] & SM \arrow[d, "f"] \\ & & A \end{tikzcd} \quad \overset{\text{adj.}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "j"] \arrow[rrd, bend right, "itj"'] & R^{\oplus n} \arrow[r, "t"] \arrow[rd, "it"'] & M \arrow[d, tail, "i"] \\ & & TA \end{tikzcd}$$

と対応するとする．$f\tau g = 0$ ならば，随伴の同型 $(\star)$ で対応する射 itj も 0 である．すると $itj = 0 = i \circ 0$ となり，i がモノ射であることから $tj = 0$ となる．よって $\tau g = S(tj) = S(0) = 0$ となる．

この事実を用いると，図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\tau) \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d, "h"] & G^{\oplus n} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, equal] & SM \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f\tau) \arrow[r, tail, "k'"'] & G^{\oplus n} \arrow[r, "f\tau"'] & A \end{tikzcd}$$

において誘導される射 $h\colon \mathrm{Ker}(\tau) \to \mathrm{Ker}(f\tau)$ が同型射であることがわかる．

$\because$) 上の図式での可換性から h がモノ射であることはすぐにわかる．よって $\mathcal{A}(G,h) = h \circ -\colon \mathcal{A}(G, \mathrm{Ker}(\tau)) \to \mathcal{A}(G, \mathrm{Ker}(f\tau))$ は単射である．命題 1.6 より $\mathcal{A}(G,-)$ は同型射を反射するから，あとは $\mathcal{A}(G,h) = h \circ -$ が全射であることを示せばよい．

$\tilde{g} \in \mathcal{A}(G, \mathrm{Ker}(f\tau))$ を任意に取る．$g = k' \circ \tilde{g}$ とおくと，$f \circ \tau \circ g = 0$ である．よって前半より $\tau \circ g = 0$ が従う．核の普遍性から $g = k \circ \hat{g}$ となる $\hat{g}\colon G \to \mathrm{Ker}(\tau)$ が存在する．このとき，$k' \circ h \circ \hat{g} = k \circ \hat{g} = g = k' \circ \tilde{g}$ となり普遍性から $h \circ \hat{g} = \tilde{g}$ がわかる．したがって $\mathcal{A}(G,h)$ は全射である．

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ker}(\tau) \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d, "h"] & G^{\oplus n} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, equal] & SM \arrow[d, "f"] \\ G \arrow[ru, dashed, "\hat{g}"] \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathrm{Ker}(f\tau) \arrow[r, tail, "k'"] & G^{\oplus n} \arrow[r, "f\tau"'] & A \end{tikzcd}$$

(Step 2): 加群 M に対してエピ射 $p\colon R^{\oplus I} \twoheadrightarrow M$ を一つ取る．$\pi = S(p)\colon G^{\oplus I} \to SM$ とおくと

き図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\pi) \arrow[r, tail] \arrow[d] & G^{\oplus I} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & SM \arrow[d, "f"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f\pi) \arrow[r, tail] & G^{\oplus I} \arrow[r, "f\pi"'] & A
\end{tikzcd}$$

において射 $\mathrm{Ker}(\pi) \to \mathrm{Ker}(f\pi)$ は同型である．

$\because$) すべての余積は有限部分余積の filtered colimit で表せる (注意 1.3)．つまり J で I の有限部分集合を表すとすると，$R^{\oplus I} = \varinjlim_J R^{\oplus J}$ が成り立つ．S は余極限を保つから $G^{\oplus I} = \varinjlim_J G^{\oplus J}$ も成り立つ．J 成分の埋め込みを $\iota\colon R^{\oplus J} \to R^{\oplus I}$ とし，pullback 図式を含む次のような図式

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}(\pi) \cap G^{\oplus J} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & G^{\oplus J} \arrow[d, "S(\iota)"] \arrow[dr, bend left, "S(p\iota)"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\pi) \arrow[r, tail] \arrow[d] & G^{\oplus I} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & SM \arrow[d, "f"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f\pi) \arrow[r, tail] & G^{\oplus I} \arrow[r, "f\pi"'] & A
\end{tikzcd}$$

を考えると，補題 2.6 により $\mathrm{Ker}(\pi) = \varinjlim_J \mathrm{Ker}(\pi) \cap G^{\oplus J}$ が成り立つ．同様に $\mathrm{Ker}(f\pi) = \varinjlim_J \mathrm{Ker}(f\pi) \cap G^{\oplus J}$ も成り立つ．

ここで $\mathrm{Ker}(\pi) \cap G^{\oplus J} = \mathrm{Ker}(S(p\iota))$ に注意すると，Step 1 で得た結果より

$$\mathrm{Ker}(\pi) \cap G^{\oplus J} = \mathrm{Ker}(S(p\iota)) \cong \mathrm{Ker}(f\pi \circ S(\iota)) = \mathrm{Ker}(f\pi) \cap G^{\oplus J}$$

が成り立つ．よって

$$\mathrm{Ker}(\pi) = \varinjlim_J \mathrm{Ker}(\pi) \cap G^{\oplus J} \cong \varinjlim_J \mathrm{Ker}(f\pi) \cap G^{\oplus J} = \mathrm{Ker}(f\pi)$$

となる．

さて S は右完全だから $\pi = S(p)$ はエピ射である．よって

$$SM = \mathrm{Im}(\pi) = G^{\oplus I} / \mathrm{Ker}(\pi) \cong G^{\oplus I} / \mathrm{Ker}(f\pi) = \mathrm{Im}(f\pi)$$

であり，この同型を通じて $f\colon SM \to A$ は包含 $\mathrm{Im}(f\pi) \hookrightarrow A$ に一致する．したがって f はモノ射である． $\square$

定理 2.8 (Gabriel-Popescu の定理 [GaPo64])**.** $\mathcal{A}$ を Grothendieck 圏とし，$G \in \mathcal{A}$ をその generator とする．$R \coloneqq \mathcal{A}(G, G)$ とおくとき，次が成り立つ．

(i) 関手 $T = \mathcal{A}(G, -)\colon \mathcal{A} \to \mathsf{Mod}(R)$ は左随伴 S を持つ．

(ii) 関手 T は充満忠実である．

(iii) 関手 S は完全関手である．

すなわちすべての Grothendieck 圏は，加群圏の反映的充満部分圏で，包含関手の左随伴が完全であるようなものとして実現できる．

Proof. (i) 命題 2.4 ですでに示した．

(ii) G は generator であるから，$T = \mathcal{A}(G, -)$ は忠実で，随伴の counit $\varepsilon_A : STA \to A$ はエピ射である．一方 ε_A は随伴の同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(STA, A) \cong \mathrm{Hom}_R(TA, TA)$$

で $\mathrm{id} : TA \to TA$ に対応する射であるから，命題 2.7 より ε_A はモノ射である．よって counit ε_A が自然同型になり，右随伴 T は充満忠実である．

(iii) S は右随伴を持つから右完全である．よって左完全であることを示せばよい．

まず，自由加群 $R^{\oplus I}$ の部分加群 $K \subseteq R^{\oplus I}$ に対して，$S(K) \to S(R^{\oplus I}) = G^{\oplus I}$ がモノ射であることを示そう．$J \subseteq I$ を有限部分集合とし，$R^{\oplus I}$ を $R^{\oplus J}$ たちの filtered colimit で表す．K と $R^{\oplus J}$ の pullback を

$$\begin{tikzcd} K_J \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & R^{\oplus J} \arrow[d] \\ K \arrow[r] & R^{\oplus I} \end{tikzcd}$$

とする．このとき $S(K_J) \to S(R^{\oplus J}) = G^{\oplus J}$ はモノ射 $K_J \to R^{\oplus J} = T(G^{\oplus J})$ に対応する射だから，命題 2.7 よりモノ射である．今 $\varinjlim_J$ は完全関手だから

$$\varinjlim_J S(K_J) \to \varinjlim_J S(R^{\oplus J})$$

もモノ射である．S は左随伴で，補題 2.6 より $K = \varinjlim_J K_J$ が成り立つことから，このモノ射は $S(K) \to S(R^{\oplus I}) = G^{\oplus I}$ と (同型を除いて) 一致する．

さて S が左完全であることを示すには，一次の左導来関手 L_1S について $L_1S = 0$ であることを示せばよい．任意の $M \in \mathsf{Mod}(R)$ に対し，完全列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^{\oplus I} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を取ると，この完全列から長完全列

$$\cdots \longrightarrow L_1S(R^{\oplus I}) \longrightarrow L_1S(M) \longrightarrow S(K) \longrightarrow S(R^{\oplus I}) \longrightarrow S(M) \longrightarrow 0$$

が得られる．このとき，$K \to R^{\oplus I}$ がモノ射だから $S(K) \to S(R^{\oplus I})$ はモノ射で，したがって $L_1S(M) = 0$ となる．以上より S は完全であることがわかった． $\square$

系 2.9. Grothendieck 圏 $\mathcal{A}$ は，完備である．

Proof. 定理 2.8 で得られた随伴 $S \dashv T$ の unit を $\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow TS$，counit を $\varepsilon\colon ST \Rightarrow \mathrm{Id}$ とする．右随伴 T が充満忠実だから，counit ε は自然同型であり，三角等式

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, Rightarrow, "\eta T"] \arrow[dr, equal] & TST \arrow[d, Rightarrow, "T\varepsilon"] \\ & T \end{tikzcd}$$

より ηT も自然同型である．$\mathcal{A}$ が完備であることを示すためには，任意の小さい圏 J と関手 $F\colon J \to \mathcal{A}$ に対して，F 上の cone 全体の集合をとる関手 $\mathrm{Cone}(-, F)\colon \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$ が表現可能であることを示せばよい．

$a \in \mathcal{A}$ を任意にとる．$\Delta\colon \mathcal{A} \to [J, \mathcal{A}]$ を対角関手とすると，$\mathrm{Cone}(a, F) = \mathrm{Nat}(\Delta a, F)$ である．T は充満忠実であるから，

$$\mathrm{Cone}(a, F) = \mathrm{Nat}(\Delta a, F) \cong \mathrm{Nat}(T(\Delta a), TF) = \mathrm{Nat}(\Delta(Ta), TF) = \mathrm{Cone}(Ta, TF)$$

である．$\mathsf{Mod}(R)$ は完備であるから $TF\colon J \to \mathsf{Mod}(R)$ は極限 $L = \varprojlim TF$ を持ち，

$$\mathrm{Cone}(Ta, TF) \cong \mathrm{Hom}_R(Ta, \varprojlim TF)$$

が成り立つ．

ここで，$\eta_L\colon L \to TS(L)$ が同型であることが示せる：

$\because$) $L = \varprojlim TF$ の limit cone を (L, ρ) とすると，各 $j \in J$ について η_L の普遍性から

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta_L"] \arrow[dr, "\rho_j"'] & TS(L) \arrow[d, dashed, "T\pi_j"] \\ & TFj \end{tikzcd}$$

を可換にする $\mathcal{A}$ の射 $\pi_j\colon S(L) \to F_j$ が一意的に存在する．普遍性から $(\pi_j)_{j\in J}$ は F 上の cone $(S(L), \pi)$ をなす．このとき cone $(TS(L), T\pi)$ を考えると，(L, ρ) が TF 上の limit cone であったから，

$$\begin{tikzcd} TS(L) \arrow[r, dashed, "\tau"] \arrow[dr, "T\pi_j"'] & L \arrow[d, "\rho_j"] \\ & TFj \end{tikzcd}$$

を可換にする $\mathsf{Mod}(R)$ の射 τ が一意的に存在する．このとき

$$\tau \circ \eta_L \circ \rho_j = T\pi_j \circ \eta_L = \rho_j = \mathrm{id}_L \circ \rho_j$$

だから $L = \varprojlim TF$ の普遍性より $\tau \circ \eta_L = \mathrm{id}_L$ が成り立つ．一方 $\eta_L \circ \tau\colon TS(L) \to TS(L)$

を考えると，T が full であるから，$\eta_L \circ \tau = T(\sigma)$ となる $\sigma\colon S(L) \to S(L)$ が存在するが，

$$T(\sigma) \circ \eta_L = \eta_L \circ \tau \circ \eta_L = \eta_L = T(\mathrm{id}_{S(L)}) \circ \eta_L$$

だから unit の普遍性より $\sigma = \mathrm{id}_{S(L)}$，したがって $\eta_L \circ \tau = \mathrm{id}_{TS(L)}$ が成り立つ．よって η_L は同型である．

したがって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cone}(a, F) = \mathrm{Nat}(\Delta a, F) &\cong \mathrm{Nat}(T(\Delta a), TF) = \mathrm{Nat}(\Delta(Ta), TF) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R(Ta, \varprojlim TF) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R(Ta, TS(\varprojlim TF)) && \text{via } \eta_L \\
&\cong \mathcal{A}(STa, S(\varprojlim TF)) && \text{via } S \dashv T \\
&\cong \mathcal{A}(a, S(\varprojlim TF)) && \text{via } \varepsilon_a
\end{aligned}$$

となり，$\mathrm{Cone}(-, F)$ が表現可能であることがわかる． □

参考文献

[GaPo64] P. Gabriel and N. Popescu. *Caractérisation des catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes*, C. R. Acad. Sci. Paris 258, 4188–4191, 1964.

[KS05] M. Kashiwara and P. Schapira. *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften vol. 332. Springer-Verlag, 2005.

[Mac98] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Math. 5, 2nd ed. Springer-Verlag, 1998.

[Mur06] Daniel Murfet. *Abelian Categories*, ver. October 5, 2006. http://therisingsea.org/notes/AbelianCategories.pdf.

[Pop73] N. Popescu. *Abelian Categories with Applications to Rings and Modules*, London Mathematical Society Monographs 3. Academic Press, 1973.

[SP] The Stacks project authors. *The Stacks project*, –2021. https://stacks.math.columbia.edu.

[高橋 12] 高橋篤史．『弦理論の代数的基礎 – 環・加群・圏からの位相的弦理論，ミラー対称性へ』，臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 89．サイエンス社，2012．

[中岡 15] 中岡宏行．『圏論の技法 – アーベル圏と三角圏でのホモロジー代数』．日本評論社，2015．

[alg-d] alg-d. 圏論—壱大整域．http://alg-d.com/math/kan_extension/.

[ぺ 20] ペーパー (@paper3510mm).『圏の generator について』，ver. 2020 年 10 月 19 日．https://paper3510mm.github.io/notes.