Kan拡張のノート

@paper3510mm*

2021年7月25日

概要

Kan拡張に関する個人的なノート．未完成．

目次

1 Kan拡張

[Mac98, Ch. X]や[Rie17, Ch. 6]を参照のこと．[alg-d]もわかりやすい．

1.1 Kan拡張

Kan拡張は，自然変換についての普遍性を持つ概念である．

> **定義 1.1.** 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ と $K\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して，K に沿った F の**左Kan拡張** (*left Kan extension*) とは，
>
> - 関手 $\operatorname{Lan}_K F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}$
> - 自然変換 $\eta\colon F \Rightarrow \operatorname{Lan}_K F \circ K$
>
> の組 $(\operatorname{Lan}_K F, \eta)$ であって，

---

* `https://paper3510mm.github.io/notes`.

- 任意の関手 $S\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ と自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow S \circ K$ に対して，自然変換 $\tau\colon \mathrm{Lan}_K F \Rightarrow S$ が一意的に存在して $\theta = \tau K \circ \eta$ が成り立つ

ときをいう．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rd, "\mathrm{Lan}_K F"] & \\ \mathcal{C} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & \mathcal{M}, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rd, bend left=50, "S"] & \\ \mathcal{C} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta"] & \mathcal{M} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rd, "\mathrm{Lan}_K F"', ""{name=L}] \arrow[rd, bend left=50, "S", ""'{name=S}] \arrow[Rightarrow, dotted, from=L, to=S, "\tau"] & \\ \mathcal{C} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & \mathcal{M}. \end{tikzcd}$$

普遍性により，η は全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{M})}(\mathrm{Lan}_K F, S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(F, S \circ K) \tag{$\spadesuit$}$$

を誘導する．逆に，S について自然な全単射 ($\spadesuit$) が存在すれば，$\mathrm{Lan}_K F$ は左 Kan 拡張になる．

双対的に，右 Kan 拡張も定義できる．

定義 1.2. 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ と $K\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して，K に沿った F の**右 Kan 拡張** (*right Kan extension*) とは，

- 関手 $\mathrm{Ran}_K F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}$
- 自然変換 $\varepsilon\colon \mathrm{Ran}_K F \circ K \Rightarrow F$

の組であって，

- 任意の関手 $S\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ と自然変換 $\theta\colon S \circ K \Rightarrow F$ に対して，自然変換 $\sigma\colon S \Rightarrow \mathrm{Ran}_K F$ が一意的に存在して $\theta = \varepsilon \circ \sigma K$ が成り立つ

ときをいう．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rd, "\mathrm{Ran}_K F"] & \\ \mathcal{C} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{M}, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rd, bend left=50, "S"] & \\ \mathcal{C} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{M} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rd, "\mathrm{Ran}_K F"', ""{name=R}] \arrow[rd, bend left=50, "S", ""'{name=S}] \arrow[Rightarrow, dotted, from=S, to=R, "\tau"] & \\ \mathcal{C} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{M}. \end{tikzcd}$$

普遍性により，ε は全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{M})}(S, \mathrm{Ran}_K F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(S \circ K, F) \tag{$\heartsuit$}$$

を誘導する．逆に，S について自然な全単射 ($\heartsuit$) が存在すれば，$\mathrm{Ran}_K F$ は右 Kan 拡張になる．

関手 $K\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して，$K^*(S) = S \circ K$ と置くと K^* は関手

$$K^*\colon \mathsf{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{M}) \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{M}),\ S \mapsto S \circ K$$

を定める．Kan 拡張の普遍性を表す全単射 (♠), (♡) から，Kan 拡張を取る操作が K^* の随伴になっていることがわかる．

命題 1.3. 関手 $K\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と別な圏 $\mathcal{M}$ を考える．すべての関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ に対して左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_K F$ が存在するとき，関手

$$\mathrm{Lan}_K\colon \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \to \mathsf{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{M})$$

が定まり，Lan_K は K^* の左随伴になる．

またすべての関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ に対して右 Kan 拡張 $\mathrm{Ran}_K F$ が存在するとき，関手

$$\mathrm{Ran}_K\colon \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \to \mathsf{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{M})$$

が定まり，Ran_K は K^* の右随伴になる．

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \arrow[r, bend left=35, "\mathrm{Lan}_K"] \arrow[r, bend right=35, "\mathrm{Ran}_K"'] \arrow[r, phantom, bend left=18, "\perp"] \arrow[r, phantom, bend right=18, "\perp"] & \mathsf{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{M}). \arrow[l, "K^*" description]
\end{tikzcd}$$

以降，主に左 Kan 拡張を考えることにする．

例 1.4 (colimits as Kan extensions)**.** $\mathcal{D} = \{*\}$ の場合を考えると，$K\colon \mathcal{C} \to \{*\}$ は $*$ への定関手になる．このとき

$$\mathsf{Fun}(\{*\}, \mathcal{M}) \cong \mathcal{M}$$

であるから，関手 $S\colon \{*\} \to \mathcal{M}$ は $\mathcal{M}$ の対象 $m := S(*) \in \mathcal{M}$ と同一視される．このとき関手 $S \circ K$ は，m への定関手 $\mathit{\Delta}_m\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ に等しい．よって左 Kan 拡張の全単射 (♠) は

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Lan}_K F(*), m) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(F, \mathit{\Delta}_m)$$

となる．この自然な全単射は，

$$\mathrm{Lan}_K F(*) = \operatorname{colim} F$$

であることを表している．すなわち余極限は左 Kan 拡張である．

同様に極限は右 Kan 拡張である．

定義 1.5. 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ と $K\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ について，左 Kan 拡張 $(\mathrm{Lan}_K F, \eta)$ が存在するとする．このとき関手 $G\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ が左 Kan 拡張 $(\mathrm{Lan}_K F, \eta)$ を**保つ**とは，組 $(G \circ \mathrm{Lan}_K F, G\eta)$

が GF の K に沿った左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_K GF$ であるときをいう．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rrd, "G\circ \mathrm{Lan}_K F"] & & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow G\eta"] & \mathcal{M} \arrow[r, "G"'] & \mathcal{N}.
\end{tikzcd}$$

命題 1.6. 左随伴は左 Kan 拡張を保つ．

Proof. 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ と $K\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ について左 Kan 拡張 $(\mathrm{Lan}_K F, \eta)$ が存在するとし，関手 $G\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ は右随伴 H を持つとする．このとき $G_*\colon \mathsf{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{M}) \to \mathsf{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{N})$ が H_* を右随伴に持つことに注意すると，任意の関手 $S\colon \mathcal{D} \to \mathcal{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{N})}(G \circ \mathrm{Lan}_K F, S) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{M})}(\mathrm{Lan}_K F, H \circ S) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(F, H \circ S \circ K) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{N})}(G \circ F, K^*(S))
\end{aligned}$$

となり $G \circ \mathrm{Lan}_K F \cong \mathrm{Lan}_K GF$ であることがわかる． □

1.2 各点 Kan 拡張

Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_K F$ は普遍性によって定義される関手であるが，これは具体的にはどのような関手であろうか。関手 $\mathrm{Lan}_K F$ を計算する一つの方法は，コンマ圏を使うことである．

定義 1.7. 関手 $K\colon \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}$ と $L\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}$ について，**コンマ圏** (*comma category*) $K \downarrow L$ とは，

- $K \downarrow L$ の対象は，$\mathcal{C}_0$ の対象 c_0 と $\mathcal{C}_1$ の対象 c_1 と $\mathcal{D}$ の射 $f\colon Kc_0 \to Lc_1$ の組 (c_0, c_1, f) である
- $K \downarrow L$ の射 $(c_0, c_1, f) \to (c'_0, c'_1, f')$ とは，$\mathcal{C}_0$ の射 $g_0\colon c_0 \to c'_0$ と $\mathcal{C}_1$ の射 $g_1\colon c_1 \to c'_1$ の組 (g_0, g_1) であって，図式

$$\begin{tikzcd}
Kc_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Kg_0"'] & Lc_1 \arrow[d, "Lg_1"] \\
Kc'_0 \arrow[r, "f'"'] & Lc'_1
\end{tikzcd}$$

  を可換にするもの

なる圏のことをいう．

特に $\mathcal{C}_1 = \{*\}$ であるとき，$L(*) = d \in \mathcal{D}$ として，$K \downarrow L = K \downarrow d$ と書く．すなわち圏 $K \downarrow d$ とは

- $K \downarrow d$ の対象は，$\mathcal{C}$ の対象 c と $\mathcal{D}$ の射 $f\colon Kc \to d$ の組 (c, f) である
- $K \downarrow d$ の射 $(c, f) \to (c', f')$ とは，$\mathcal{C}$ の射 $g\colon c \to c'$ であって図式

  $$\begin{tikzcd} Kc \arrow[d, "Kg"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Kc' \arrow[r, "f'"'] & d \end{tikzcd}$$

  を可換にするもの

なる圏のことである．

コンマ圏 $K \downarrow L$ には自然な射影関手

$$\Pi_0\colon K \downarrow L \to \mathcal{C}_0, \quad (c_0, c_1, f) \mapsto c_0$$
$$\Pi_1\colon K \downarrow L \to \mathcal{C}_1, \quad (c_0, c_1, f) \mapsto c_1$$

が存在している．さらに自然変換

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, "L"] & \mathcal{D} \\ K \downarrow L \arrow[u, "\Pi_1"] \arrow[r, "\Pi_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\rho"] & \mathcal{C}_0 \arrow[u, "K"'] \end{tikzcd}$$

が，$(c_0, c_1, f) \in K \downarrow L$ に対して $\rho_{(c_0,c_1,f)} \coloneqq f$ と定めることで得られる．

> **注意 1.8.** コンマ圏 $K \downarrow L$ はこのような図式の中で，ある意味で普遍的なものになっている．すなわち strict 2-category Cat での weighted limit になっている．

さて，ここで一つの観察をしよう．関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ と $K\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_K F$ が存在するとする．対象 $d \in \mathcal{D}$ に対して $\mathrm{Lan}_K F(d)$ を考えたい．ここで圏同型 $\mathcal{D} \cong \mathsf{Fun}(\{*\}, \mathcal{D})$ により，対象 $d \in \mathcal{D}$ は関手 $d\colon \{*\} \to \mathcal{D}$ と思える．よって知りたい $\mathrm{Lan}_K F(d)$ は，図式

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "d"] & \mathcal{D} \arrow[dr, "\mathrm{Lan}_K F"] & \\ & \mathcal{C} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & \mathcal{M}, \end{tikzcd}$$

の上辺である．コンマ圏 $K \downarrow d$ を取って図式

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "d"] & \mathcal{D} \arrow[dr, "\mathrm{Lan}_K F"] & \\ K \downarrow d \arrow[u, "\Pi_1"] \arrow[r, "\Pi_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\rho"] & \mathcal{C} \arrow[u, "K"'] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & \mathcal{M}, \end{tikzcd} \tag{$\clubsuit$}$$

を考えるとき，もしこれが左 Kan 拡張であるならば，例 1.4 で見たように

$$\operatorname{Lan}_K F(d) \cong \operatorname{colim}(K \downarrow d \xrightarrow{\Pi_0} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{M})$$

となり，$\operatorname{Lan}_K F(d)$ が計算できることがわかる．

実際には図式 (♣) は左 Kan 拡張になるとは限らない．しかしある意味でこの逆が成り立つ．

今，すべての対象 $d \in \mathcal{D}$ について余極限 $\operatorname{pLan}(d) := \operatorname{colim}(K \downarrow d \xrightarrow{\Pi_0} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{M})$ が存在するとする．このとき対応 $d \mapsto \operatorname{pLan}(d)$ は関手

$$\operatorname{pLan}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}$$

を定めることが確認できる．この関手は，実は左 Kan 拡張になっていることがわかる．

> **定理 1.9.** 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ と $K\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ について，すべての対象 $d \in \mathcal{D}$ に対し余極限 $\operatorname{pLan}(d) := \operatorname{colim}(K \downarrow d \xrightarrow{\Pi_0} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{M})$ が存在するとする．このとき関手 $\operatorname{pLan}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}, d \mapsto \operatorname{pLan}(d)$ は，K に沿った F の左 Kan 拡張を与える．

Proof. 頑張って左 Kan 拡張の普遍性を持つことを確認する． □

> **定義 1.10.** 定理 1.9 において得られる左 Kan 拡張を，**各点左 Kan 拡張** (*pointwise left Kan extension*) と呼ぶ．

> **系 1.11.** 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ と $K\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ について，$\mathcal{C}$ が small で $\mathcal{M}$ が余完備であるとき，左 Kan 拡張 $\operatorname{Lan}_K F$ が存在する．特にこれは各点左 Kan 拡張である．

Proof. 定理 1.9 より明らか． □

> **系 1.12.** 余連続関手は各点左 Kan 拡張を保つ．

Proof. 各点左 Kan 拡張の構成から明らか． □

最後に，各点左 Kan 拡張の特徴づけを示す．圏 $\mathcal{C}$ 上の前層圏を $\mathsf{Psh}(\mathcal{C}) = \mathsf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$ と書く．

> **補題 1.13.** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ と $K\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．対象 $d \in \mathcal{D}$ について，コンマ圏 $K \downarrow d$ の第一射影を $\Pi_0\colon K \downarrow d \to \mathcal{C}$ とする．このとき $m \in \mathcal{M}$ について自然な全単射
>
> $$\operatorname{Hom}_{\mathsf{Fun}(K\downarrow d, \mathcal{M})}(F\Pi_0, \Delta_m) \cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(K-, d), \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(F-, m))$$
>
> が成り立つ．

Proof. 頑張って示す．[Mac98, Ch. X, §5, Lem. 4]，[Rie17, Lem. 6.3.8]． □

注意 1.14. より一般に次の全単射があるはず．前層 $W\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ に対して，$m \in \mathcal{M}$ について自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\int W, \mathcal{M})}(F\Pi, \Delta_m) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}(W, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(F-, m))$$

がある．ここで $\int W$ は W の category of elements で，$\Pi\colon \int W \to \mathcal{C}$ は自然な射影である．

定理 1.15. 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$，$K\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$T\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ に対して，次は同値である．

(i) T は K に沿った F の各点左 Kan 拡張である．

(ii) 対象 $d \in \mathcal{D}$，$m \in \mathcal{M}$ について自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(Td, m) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(K-, d), \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(F-, m))$$

が存在する．

(iii) T は K に沿った F の左 Kan 拡張であり，すべての対象 $m \in \mathcal{M}$ に対して関手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-, m)\colon \mathcal{M} \to \mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$ がこの Kan 拡張を保つ．

Proof. (i) $\Rightarrow$ (iii): 定理 1.9 と系 1.12 よりわかる．

(iii) $\Rightarrow$ (ii): T は K に沿った F の左 Kan 拡張であり，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-, m)\colon \mathcal{M} \to \mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$ がこれを保つから，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(T-, m)$ が K に沿った $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(F-, m)$ の左 Kan 拡張になる．よって任意の関手 $S\colon \mathcal{D} \to \mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$ に対して，自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{M}, \mathsf{Set}^{\mathrm{op}})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(T-, m), S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Set}^{\mathrm{op}})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(F-, m), S \circ K)$$

が存在する．反対圏で考えれば，

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{M})}(S, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(T-, m)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}(S \circ K, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(F-, m))$$

となる．$S = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, d)$ を考えれば

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{M})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, d), \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(T-, m)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(K-, d), \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(F-, m))$$

となり，米田の補題により

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(Td, m) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(K-, d), \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(F-, m))$$

を得る．

(ii) $\Rightarrow$ (i): 補題 1.13 より $Td \cong \mathrm{colim}(F\Pi_0)$ となるから，定理 1.9 よりわかる． □

1.3 普遍随伴

小さい圏から余完備な圏への関手は，すべての左 Kan 拡張を持つのであった．特に small な圏 $\mathcal{C}$ に対して，米田埋め込み $\mathsf{y}\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Psh}(\mathcal{C})$ の左 Kan 拡張は常に存在する．

定理 1.16. 小さい圏 $\mathcal{C}$ に対する米田埋め込み $\mathsf{y}\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Psh}(\mathcal{C})$ の関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に沿った左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_F\, \mathsf{y}$ について，$d \in \mathcal{D}$ に対して

$$\mathrm{Lan}_F\, \mathsf{y}(d) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, d)$$

が成り立つ．

Proof. 前層圏 $\mathsf{Psh}(\mathcal{C})$ は余完備だから $\mathrm{Lan}_F\, \mathsf{y}$ は各点左 Kan 拡張である．よって定理 1.15 の (ii) を用いると，任意の $P \in \mathsf{Psh}(\mathcal{C})$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}(\mathrm{Lan}_F\, \mathsf{y}(d), P) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, d), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathsf{y}-, P))\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, d), P)\end{aligned}$$

が成り立つ．これは P について自然だから，米田の補題により $\mathrm{Lan}_F\, \mathsf{y}(d) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, d)$ が成り立つことがわかる． □

系 1.17. 小さい圏 $\mathcal{C}$ の米田埋め込み $\mathsf{y}\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Psh}(\mathcal{C})$ について，$\mathrm{Lan}_{\mathsf{y}}\, \mathsf{y} \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ が成り立つ．

Proof. 任意の $P \in \mathsf{Psh}(\mathcal{C})$ に対して，定理 1.16 と米田の補題により，

$$\mathrm{Lan}_{\mathsf{y}}\, \mathsf{y}(P) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}(\mathsf{y}-, P) \cong P$$

となり，$\mathrm{Lan}_{\mathsf{y}}\, \mathsf{y} \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ が成り立つ． □

系 1.18. 小さい圏 $\mathcal{C}$ 上のすべての前層 $P \in \mathsf{Psh}(\mathcal{C})$ は，表現可能関手の余極限で表せる．

Proof. 系 1.17 より $P \cong \mathrm{Lan}_{\mathsf{y}}\, \mathsf{y}(P)$ が成り立つが，今 $\mathrm{Lan}_{\mathsf{y}}\, \mathsf{y}$ は各点左 Kan 拡張であるから，定理 1.9 より

$$\begin{aligned}P &\cong \mathrm{Lan}_{\mathsf{y}}\, \mathsf{y}(P)\\ &\cong \mathrm{colim}(\mathsf{y} \downarrow P \xrightarrow{\Pi_0} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathsf{y}} \mathsf{Psh}(\mathcal{C}))\\ &= \mathrm{colim}_{(c,x)\in \mathsf{y}\downarrow P}\, \mathsf{y}(c)\end{aligned}$$

となる． □

関手 F に沿った米田埋め込み y の左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_F\, \mathsf{y}$ を考えたが，逆方向に y に沿った F の左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_{\mathsf{y}}\, F$ も考えられる．実はこれらの関手は，良い場合には随伴を定めることがわかる．

定理 1.19 (普遍随伴 [Rie17, Remark 6.5.9], [Gro15, Digression 1.8], [*n*Lab, “nerve and realization”])**.** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とし，$\mathcal{C}$ は小さい圏であるとする．米田埋め込み y に沿った F の各点左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_{\mathsf{y}}\, F$ が存在するとき，随伴

$$\mathrm{Lan}_{\mathsf{y}}\, F \dashv \mathrm{Lan}_F\, \mathsf{y}$$

> が存在する．特に $\mathcal{D}$ が余完備なら，これが成り立つ．
>
> $$\begin{tikzcd}
\mathsf{Psh}(\mathcal{C}) \arrow[dr, shift left=2, "\mathrm{Lan}_{\mathsf{y}} F"] \arrow[dr, phantom, "\dashv" sloped] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "\mathsf{y}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{D}, \arrow[ul, shift left=2, "\mathrm{Lan}_F \mathsf{y}"]
\end{tikzcd}$$

Proof. 各点左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_{\mathsf{y}} F$ が存在するとき，定理 1.15 (ii) と米田の補題と定理 1.16 を用いると，$d \in \mathcal{D}$ と $P \in \mathsf{Psh}(\mathcal{C})$ について

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathrm{Lan}_{\mathsf{y}} F(P), d) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}(\mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}(\mathsf{y}-, P), \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, d)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}(P, \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, d)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Psh}(\mathcal{C})}(P, \mathrm{Lan}_F \mathsf{y}(D))
\end{aligned}$$

が成り立ち，よって $\mathrm{Lan}_{\mathsf{y}} F$ は $\mathrm{Lan}_F \mathsf{y}$ の左随伴である． ☐

このようにして得られる随伴 $\mathrm{Lan}_{\mathsf{y}} F \dashv \mathrm{Lan}_F \mathsf{y}$ を**普遍随伴**と呼ぶことにする ([alg-d])．

> **命題 1.20.** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ と $K\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．各点左 Kan 拡張 $(\mathrm{Lan}_K F, \eta)$ が存在するとき，K が充満忠実ならば，η が自然同型である．

Proof. [Mac98, Ch. X, §3, Cor. 3]，[Rie17, Cor. 6.3.9]. ☐

> **定理 1.21** ([Kel82, Theorem 4.51], [KaSc06, Corollary 2.7.4])**.** $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とし，$\mathcal{C}$ は small で $\mathcal{D}$ は余完備であるとする．
>
> (i) すべての余連続な関手 $S\colon \mathsf{Psh}(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$ は，$F = S \circ \mathsf{y}$ の y に沿った左 Kan 拡張である．特に右随伴を持つ．
>
> (ii) すべての随伴 $S \dashv T\colon \mathsf{Psh}(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$ は普遍随伴である．
>
> (iii) 関手 $\mathrm{Lan}_{\mathsf{y}}\colon \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathsf{Fun}_{\mathrm{cc}}(\mathsf{Psh}(\mathcal{C}), \mathcal{D})$ は圏同値を与える．ここで $\mathsf{Fun}_{\mathrm{cc}}$ は余連続な関手のなす充満部分圏を表す．

Proof. ☐

1.4 すべての概念

すべての概念は Kan 拡張である．

すでに例 1.4 において余極限が左 Kan 拡張であることをみた．

> **命題 1.22** (adjunctions as Kan extensions)**.** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を関手とする．
>
> (i) F と G が随伴 $(F \dashv G, \eta, \varepsilon)$ をなすとき，(G, η) は F に沿った $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ の左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_F \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ であり，(F, ε) は G に沿った $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ の右 Kan 拡張 $\mathrm{Ran}_G \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ である．
>
> (ii) 逆に $(G, \eta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF)$ が F に沿った $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ の左 Kan 拡張で，F がこの Kan 拡張を保つとき，η を unit とする随伴 $F \dashv G$ がある．

Proof. □

1.5 Density

> **定義 1.23.** 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が**稠密** (*dense*) であるとは，F に沿った米田埋め込み $\mathsf{y}\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Psh}(\mathcal{C})$ の左 Kan 拡張が充満忠実であるときをいう．
>
> $$\begin{tikzcd}
\mathsf{Psh}(\mathcal{C}) & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "\mathsf{y}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{D}. \arrow[ul, "\mathrm{Lan}_F \mathsf{y}"']
\end{tikzcd}$$

系 1.17 より米田埋め込み y は dense である．

参考文献

[Gro15] Moritz Groth. *A short course on ∞-categories*. 2015. https://arxiv.org/abs/1007.2925.

[KaSc06] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and sheaves*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] 332, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Kel82] G. M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory*. London Mathematical Society Lecture Note Series 64, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982. Reprints in Theory and Applications of Categories 10, 2005.

[Mac98] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician. Second edition*. Graduate Texts in Mathematics 5, Springer-Verlag, New York, 1998.

[Rie17] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Dover Publications, 2017.

[nLab] nLab, –2021. https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage.

[alg-d] alg-d. “Kan 拡張”，圏論—壱大整域．http://alg-d.com/math/kan_extension/kan_extension.pdf.