加法的層の圏と射影スキーム *

paper3510mm†

2022 年 12 月 30 日

概要

Grothendieck 圏は，Gabriel-Popescu の定理の成立によって Grothendieck トポスの加法版 (Ab-豊穣版) と見なすことができる．実際，Ab-豊穣の文脈でも Grothendieck 位相やそれに関する層の概念が定義でき，Ab-豊穣層の圏のクラスが Grothendieck 圏のクラスと一致する．

本稿では，Ab-豊穣圏上での Grothendieck 位相を定義し，その例として $\mathbb{Z}$-algebra 上の tail topology を紹介する．特に，射影スキーム $\mathrm{Proj}(S)$ 上の準連接層のなす圏 $\mathsf{Qcoh}(\mathrm{Proj}(S))$ が，S を $\mathbb{Z}$-algebra と見なしたときの tail topology に関する加法的層の圏として得られることを確認する．

目次

1 導入：加法的トポス

アーベル圏の中でも Grothendieck 圏は特に良い性質をもつ圏として知られている．

定義 1.1. アーベル圏 $\mathcal{A}$ が **Grothendieck 圏** (*Grothendieck category*) であるとは，

(i) すべての余積が存在する
(ii) filtered colimit をとる関手が完全である
(iii) generator を持つ

* 本稿は圏論 Advent Calender 2022 (https://adventar.org/calendars/7888) の 15 日目の記事です．
† https://paper3510mm.github.io/notes.

をみたすときをいう．

例えば，環 R に対して右 R-加群のなすアーベル圏 $\mathsf{Mod}(R)$ は Grothendieck 圏である．Grothendieck 圏に対しては次のような外在的な特徴づけが知られている．

定義 1.2. 圏 $\mathcal{C}$ の充満部分圏 $\mathcal{D}$ が**反映的** (*reflective*) であるとは，包含関手 $i\colon \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ が左随伴 $a\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を持つときをいう．さらに充満部分圏 $\mathcal{D}$ が **lex-反映的** (*lex-reflective*)[*1]であるとは，反映的部分圏であって左随伴 a が左完全である（有限極限を保つ）ときをいう．

定理 1.3 (Gabriel-Popescu の定理 [PG64], [ぺ 21])**.** 任意の (プレ加法) 圏 $\mathcal{A}$ に対して，次は同値である．

(i) $\mathcal{A}$ は Grothendieck 圏である．
(ii) $\mathcal{A}$ はある環 R 上の加群圏 $\mathsf{Mod}(R)$ の lex-反映的部分圏と圏同値である．

一方で，Grothendieck トポスに対しても同様の外在的特徴づけがあることが知られている．

定義 1.4. **Grothendieck トポス** (*Grothendieck topos*) とは，あるサイト $(\mathcal{C}, J)$ 上の層の圏 $\mathsf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ と圏同値な圏のことをいう．

定理 1.5. 任意の圏 $\mathcal{E}$ に対して，次は同値である．

(i) $\mathcal{E}$ は Grothendieck トポスである．
(ii) $\mathcal{E}$ はある圏 $\mathcal{C}$ 上の前層圏 $\mathsf{Psh}(\mathcal{C})$ の lex-反映的部分圏と圏同値である．

定理 1.5 を踏まえれば，定理 1.3 は

Grothendieck 圏とは，Grothendieck トポスの加法版 (Ab-豊穣版) である

を主張するものだと解釈できる．実際，この観察は正しく，Set-豊穣の状況で定義されていた Grothendieck 位相やそれに関する層の概念は，Ab-豊穣でも全く同様に定義でき，Ab-豊穣層のなす圏のクラスはちょうど Grothendieck 圏のクラスに一致する ([BQ96], [Low04]).

本稿では，Ab-豊穣圏上での Grothendieck 位相を定義し，その例として $\mathbb{Z}$-algebra 上の tail topology を紹介する．特に，射影スキーム $\mathrm{Proj}(S)$ 上の準連接層のなす圏 $\mathsf{Qcoh}(\mathrm{Proj}(S))$ が，S を自然に $\mathbb{Z}$-algebra と見なしたときの tail topology に関する加法的層の圏として得られることを確認する．

[*1] $\mathcal{C}$ がアーベル圏の場合，Giraud 部分圏とも呼ばれる．

2 Linear Grothendieck topology と linear site

通常の Grothendieck 位相は Set-豊穣圏に対して定義される概念であるが，Ab-豊穣圏上での類似を考えることで加法的な Grothendieck 位相を定義することができる．以降，“加法的” や “linear” の言葉で “Ab-豊穣” を表すことにする．

プレ加法圏 $\mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{C}$ 上の加群圏を $\mathsf{Mod}(\mathcal{C}) = [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Ab}]$ と表す．対象 A が表現する関手を $\mathcal{C}(-, A)$ で表す．

定義 2.1. プレ加法圏 $\mathcal{C}$ の対象 A に対して，A 上の *linear sieve* とは，表現可能関手 $\mathcal{C}(-, A)$ の部分対象 $R \subseteq \mathcal{C}(-, A)$ のことをいう．本稿では単に sieve と呼ぶ．

プレ加法圏 $\mathcal{C}$ における射の族 $F = \{f_i \colon A_i \to A\}_{i \in I}$ に対して，

$$\forall i \in I, \quad f_i \in R(A_i)$$

をみたす最小の sieve が存在する．これを $\langle F \rangle$ で表し，F で生成される sieve という．具体的には，$A' \in \mathcal{C}$ に対して

$$\langle F \rangle (A') = \left\{ \sum\nolimits_{j=1}^{n} g_j \;\middle|\; \text{各 } g_j \text{ はある } f_i \text{ を経由して分解する} \right\}$$

で与えられる．

プレ加法圏 $\mathcal{C}$ の射 $f \colon B \to A$ と A 上の sieve R に対して，$\mathsf{Mod}(\mathcal{C})$ での pullback

$$\begin{tikzcd} f^{-1}R \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathcal{C}(-, B) \arrow[d, "f \circ -"] \\ R \arrow[r, hook] & \mathcal{C}(-, A) \end{tikzcd}$$

を取ることによって B 上の sieve $f^{-1}R$ が得られる．また A 上の sieve R, S に対して，その共通部分 $R \cap S$ を pullback

$$\begin{tikzcd} R \cap S \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & S \arrow[d, hook] \\ R \arrow[r, hook] & \mathcal{C}(-, A) \end{tikzcd}$$

によって定める．

定義 2.2. $\mathcal{C}$ をプレ加法圏とする．各対象 $A \in \mathcal{C}$ に対して A 上の sieve の集まり $\mathcal{T}(A)$ を得る対応 $\mathcal{T}$ のことを *covering system* と呼ぶことにする．covering system $\mathcal{T}$ について，次の条件を考える：

(T1) 任意の $A \in \mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{C}(-, A) \in \mathcal{T}(A)$ である．
(T2) 任意の $A \in \mathcal{C}$ に対して，$R, R' \in \mathcal{T}(A)$ ならば $R \cap R' \in \mathcal{T}(A)$ である．

(T3) 任意の射 $f\colon B \to A$ と $R \in \mathcal{T}(A)$ に対して，$f^{-1}R \in \mathcal{T}(B)$ である．

(T4) 任意の A 上の sieve $R \subseteq \mathcal{C}(-,A)$ を考える．ある $S \in \mathcal{T}(A)$ について

$$\forall B \in \mathcal{C}, \quad \forall f \in S(B), \quad f^{-1}R \in \mathcal{T}(B)$$

が成り立つならば，$R \in \mathcal{T}(A)$ である．

covering system $\mathcal{T}$ が条件 (T1), (T2), (T3) をみたすとき *linear Grothendieck pretopology* であるといい，条件 (T1), (T3), (T4) をみたすとき *linear Grothendieck topology* であるという．本稿では単に linear (pre)topology と呼ぶ．

プレ加法圏 $\mathcal{C}$ とその上の linear topology $\mathcal{T}$ の組 $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ を**加法的サイト** (*linear site*) という．

注意 2.3. 加法的な Grothendieck 位相の概念は古典的に知られているもので，[Ste75, Chap. VI, §5] では Gabriel topology と呼ばれ，[Pop73, §4.9] では localizing system と呼ばれている．[Low04] も見よ．より一般の豊穣圏に対する Grothendieck 位相については [BQ96] で定義されている．

命題 2.4. プレ加法圏 $\mathcal{C}$ 上の linear topology $\mathcal{T}$ は，条件 (T2) をみたす．つまり linear topology は linear pretopology である．

Proof. すぐにわかる． □

通常の層と同様に加法的な層も定義でき，Grothendieck トポスの理論で知られる結果の Ab-豊穣版が成り立つ．

定義 2.5. $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ を linear site とする．$\mathcal{C}$ 上の加群 $M \in \mathsf{Mod}(\mathcal{C})$ が**加法的層** (*linear sheaf*) であるとは，任意の $A \in \mathcal{C}$ と $R \in \mathcal{T}(A)$ に対して，包含 $R \subseteq \mathcal{C}(-,A)$ が誘導する射

$$M(A) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(-,A), M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R, M)$$

が同型であるときをいう．

加法的層がなす $\mathsf{Mod}(\mathcal{C})$ の部分圏を $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\mathcal{T})$ で表す．

命題 2.6. $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ を linear site とする．このとき包含関手 $i\colon \mathsf{Sh}(\mathcal{C},\mathcal{T}) \hookrightarrow \mathsf{Mod}(\mathcal{C})$ は，左完全な左随伴 $\ell\colon \mathsf{Mod}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Sh}(\mathcal{C},\mathcal{T})$ を持つ．この左随伴 ℓ を**層化関手** (*sheafification functor*) という．

Proof. Well-known. □

命題 2.7. $\mathcal{C}$ をプレ加法圏とする．$\mathcal{C}$ 上の linear topology $\mathcal{T}$ に対して部分圏 $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\mathcal{T}) \subseteq \mathsf{Mod}(\mathcal{C})$ を得る対応は，一対一対応

$$\{\mathcal{C} \text{ 上の linear topology}\} \cong \{\mathsf{Mod}(\mathcal{C}) \text{ の lex-反映的部分圏 }\}$$

を与える．

Proof. Well-known. □

Ab-豊穣の状況では，別な部分圏との対応も存在する．

定義 2.8. $\mathcal{C}$ をプレ加法圏，$\mathcal{D} \subseteq \mathsf{Mod}(\mathcal{C})$ を充満部分圏とする．

(i) $\mathcal{D}$ が *hereditary* であるとは，対象の商をとる操作で閉じるときをいう．
(ii) $\mathcal{D}$ が *cohereditary* であるとは，対象の部分対象をとる操作で閉じるときをいう．
(iii) $\mathcal{D}$ が *Serre* であるとは，対象の部分・商・拡大をとる操作で閉じるときをいう．
(iv) $\mathcal{D}$ が *prelocalizing* であるとは，対象の部分・商・余積をとる操作で閉じるときをいう．
(v) $\mathcal{D}$ が *localizing* であるとは，対象の部分・商・拡大・余積をとる操作で閉じるときをいう．

プレ加法圏 $\mathcal{C}$ 上の加群 $M\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ と対象 $A \in \mathcal{C}$ に対して，米田の補題により自然な同型

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}(-, A), M) \cong M(A)$$

が存在する．この同型のもと $x \in M(A)$ が対応する射を $u_x\colon \mathcal{C}(-, A) \to M$ で表すことにする．このとき A 上の sieve $\mathrm{Ann}(x)$ を $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ker}(u_x)$，つまり

$$\mathrm{Ann}(x)(A') = \{a\colon A' \to A \mid M(a)(x) = xa = 0\}$$

によって定める．

命題 2.9. $\mathcal{C}$ をプレ加法圏とする．

(1) 一対一対応

$$\{\mathcal{C} \text{ 上の linear pretopology}\} \cong \{\mathsf{Mod}(\mathcal{C}) \text{ の prelocalizing 部分圏 }\}$$

が存在する．

(2) (1) において linear pretopology $\mathcal{T}$ と prelocalizing 部分圏 $\mathcal{D}$ が対応するとき，

$$\mathcal{T} \text{ は linear topology である} \iff \mathcal{D} \text{ は localizing である．}$$

さらにこのとき，層化関手を $\ell\colon \mathsf{Mod}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ とすると

$$\mathcal{D} = \mathrm{Ker}(\ell) \coloneqq \{M \in \mathsf{Mod}(\mathcal{C}) \mid \ell(M) = 0\}$$

が成り立つ．

Proof. (1) $\mathcal{C}$ 上の linear pretopology $\mathcal{T}$ に対して $\mathsf{Mod}(\mathcal{C})$ の部分圏

$$\mathcal{D}_{\mathcal{T}} \coloneqq \{M \in \mathsf{Mod}(\mathcal{C}) \mid \text{任意の } A \in \mathcal{C} \text{ と } x \in M(A) \text{ に対して } \mathrm{Ann}(x) \in \mathcal{T}(A)\}$$

を得る対応が一対一対応を与える．逆の対応は，$\mathcal{D}$ に対して

$$\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(A) = \{R : \text{sieve} \mid \mathcal{C}(-, A)/R \in \mathcal{D}\}$$

と定めることで得られる ([Pop73, Ch. 4, Thm. 9.1])．(2) については [Ste75, Ch.X, Thm. 2.1], [Mur06, Thm. 21] も見よ． □

定理 2.10 ([Pop73, Ch. 4, Thm. 4.9])**.** $\mathcal{C}$ をプレ加法圏，$T\colon \mathsf{Mod}(\mathcal{C}) \to \mathcal{E}$ を完全な加法関手とし，T は充満忠実な右随伴 S を持つとする．このとき $\operatorname{Ker}(T)$ は localizing 部分圏で，T は圏同値 $\mathsf{Mod}(\mathcal{C})/\operatorname{Ker}(T) \simeq \mathcal{E}$ を誘導する．

まとめれば，$\mathcal{C}$ 上の linear topology $\mathcal{T}$ と localizing 部分圏 $\mathcal{D} \subseteq \mathsf{Mod}(\mathcal{C})$ が対応するとき

$$\mathsf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{T}) \simeq \mathsf{Mod}(\mathcal{C})/\mathcal{D}$$

が成り立つことがわかる．

3 $\mathbb{Z}$-algebra とその上の tail topology

プレ加法圏のなかでも $\mathbb{Z}$-algebra と呼ばれるものを考えてみよう．これは $\mathbb{Z}$-次数付き環の拡張となる対象である．

定義 3.1. $\mathbb{Z}$-*algebra* とは，$\operatorname{ob}(\mathcal{C}) \cong \mathbb{Z}$ であるようなプレ加法圏 $\mathcal{C}$ のことをいう．以降，全単射を通して $\operatorname{ob}(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}$ とみなす．

$\mathbb{Z}$-algebra の射とは，加法関手 F であって，すべての $i \in \mathbb{Z}$ に対し $F(i) = i$ をみたすもののことをいう．$\mathbb{Z}$-algebra のなす圏を $\mathbb{Z}\text{-}\mathsf{Alg}$ で表す．

例 3.2. 整数 $\mathbb{Z}$ で次数付けされた次数付き環 $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ を考える[*2]．このとき A に付随した $\mathbb{Z}$-algebra が，対象の集合を $\mathbb{Z}$ とし，$i, j \in \mathbb{Z}$ に対して射の集合を

$$\operatorname{Hom}(i, j) = A_{i-j}$$

とすることによって得られる．この対応は $\mathbb{Z}$-次数付き環のなす圏 $\mathbb{Z}\text{-}\mathsf{GrAlg}$ から $\mathbb{Z}$-algebra のなす圏への充満忠実関手

$$\mathbb{Z}\text{-}\mathsf{GrAlg} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathsf{Alg}$$

を与えることがわかる．この意味で $\mathbb{Z}$-algebra は $\mathbb{Z}$-次数付き環の一般化になっている．$\mathbb{Z}$-次数付き環 A に付随して得られる $\mathbb{Z}$-algebra も同じ記号 A で表すことにする．

[*2] 可換でなくてもよい．

定義 3.3. n を整数とする．$\mathbb{Z}$-algebra $\mathcal{C}$ に対して，$\mathbb{Z}$-algebra $\mathcal{C}(n)$ が

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(i, j) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(i+n, j+n)$$

と定めることによって得られる．これを $\mathcal{C}$ の *n-twist* という．

n-twist をとる操作は，$\mathbb{Z}$-Alg の自己圏同型

$$(n)\colon \mathbb{Z}\text{-}\mathsf{Alg} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathsf{Alg}$$

を与える．$\mathbb{Z}$-次数付き環 A に対しては，$A(n) = A$ であることに注意する．

定義 3.4. $\mathbb{Z}$-algebra $\mathcal{C}$ に対して，加法関手 $M\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ のことを**右 $\mathcal{C}$-加群** (*right $\mathcal{C}$-module*) と呼ぶ．以降，右 $\mathcal{C}$-加群のことを単に $\mathcal{C}$-加群と呼ぶ．

$\mathcal{C}$-加群のなす圏を $\mathsf{Mod}(\mathcal{C}) \coloneqq \mathsf{Ab}\text{-}\mathsf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Ab})$ と表す．

例 3.5. $\mathbb{Z}$-次数付き環 A を $\mathbb{Z}$-algebra とみなすとき，A 上の加群 $M\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ とは

- 各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して $M_i \in \mathsf{Ab}$ が与えられている
- 各 $i, j \in \mathbb{Z}$ に対して準同型 $\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(i, j) = A_{j-i} \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(M_i, M_j)$ が与えられている．これは，適当に添え字を付け替えて準同型 $M_i \times A_n \to M_{i+n}$ を与えることと等価である

から成るデータで与えられる．すなわち A 上の加群とは，ちょうど $\mathbb{Z}$-次数付き A-加群のことである．このとき $\mathsf{Mod}(A) = \mathsf{GrMod}(A)$ とも書く．

特に $0 \in \mathbb{Z}$ の表現可能関手 $\mathrm{Hom}(-, 0)\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ は，A 自身を A 上の次数付き加群と見なしたもののことである．

定義 3.6. $\mathbb{Z}$-algebra $\mathcal{C}$ 上の加群 $M\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ に対して，$\mathcal{C}(n)$ 上の加群 $M[n]\colon \mathcal{C}(n)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ が

$$M[n]_i \coloneqq M_{i+n}$$

によって定まる．これを M の *n-shift* という．

例 3.7. $\mathbb{Z}$-次数付き環 A を $\mathbb{Z}$-algebra とみなすとき，A-加群の n-shift とは次数付き加群としての n-shift に他ならない．$\mathbb{Z}$-次数付き環 A に対しては $A(n) = A$ であったから，n-shift も A 上の加群になる．

特に A 自身を次数付き A-加群と見なしたとき，その $(-n)$-shift $A[-n]$ は対象 $n \in \mathbb{Z}$ の表現可能関手 $\mathrm{Hom}(-, n)\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ のことである．

$\mathbb{Z}$-次数付き環に対する諸概念は，自然に $\mathbb{Z}$-algebra に対して拡張される．

定義 3.8. $\mathbb{Z}$-algebra $\mathcal{C}$ が *positively graded* であるとは，$m < n$ をみたす任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ について $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(m, n) = 0$ が成り立つときをいう．

$\mathbb{Z}$-次数付き環 A を $\mathbb{Z}$-algebra とみなすとき，A が positively graded であることは，次数付き環として positively graded（つまり $\mathbb{N}$-次数付き）であることと同値である．

定義 3.9. $\mathcal{C}$ を positively graded な $\mathbb{Z}$-algebra とする．$\mathcal{C}$-加群 M と $k \in \mathbb{Z}$ に対して，M の *k-trancated submodule* $M_{\geq k}$ を

$$(M_{\geq k})_n = \begin{cases} M_n & (n \geq k), \\ 0 & (n < k) \end{cases}$$

で定める．また $\mathcal{C}$-加群 $M_{<k}$ を完全列

$$0 \to M_{\geq k} \to M \to M_{<k} \to 0$$

によって定義する．

$k \leq k'$ ならば $M_{\geq k'} \subseteq M_{\geq k}$ が成り立つから，M の filtration

$$0 \subseteq \cdots \subseteq M_{\geq 2} \subseteq M_{\geq 1} \subseteq M_{\geq 0} \subseteq M_{\geq -1} \subseteq \cdots \subseteq M$$

が取れる．

◊　◊　◊

positively graded な $\mathbb{Z}$-algebra $\mathcal{C}$ 上の linear topology について考えよう．

$\mathcal{C}$ 上の covering system $\mathcal{L}_{\mathrm{tail}}$ を

$$R \in \mathcal{L}_{\mathrm{tail}}(n) :\Longleftrightarrow \quad \exists k \geq n, \quad \mathcal{C}(-, n)_{\geq k} \subseteq R$$

によって定める．

命題 3.10. positively graded な $\mathbb{Z}$-algebra $\mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{L}_{\mathrm{tail}}$ は定義 2.2 の条件 (T1), (T2), (T3) をみたし，$\mathcal{C}$ 上の linear pretopology になる．

Proof. (T1) $\mathcal{C}$ が positively graded であることより $\mathcal{C}(-, n)_{\geq n} = \mathcal{C}(-, n)$ が成り立つから，$\mathcal{C}(-, n) \in \mathcal{L}_{\mathrm{tail}}(n)$ がわかる．

(T2) $R, R' \in \mathcal{L}_{\mathrm{tail}}(n)$ を取ると，ある $k, k' \geq n$ が存在して

$$\mathcal{C}(-, n)_{\geq k} \subseteq R, \quad \mathcal{C}(-, n)_{\geq k'} \subseteq R'$$

となる．ここで $k \leq k'$ であるとしてよい．このとき $\mathcal{C}(-, n)_{\geq k'} \subseteq \mathcal{C}(-, n)_{\geq k}$ であるから，$\mathcal{C}(-, n)_{\geq k'} \subseteq R \cap R'$ となる．よって $R \cap R' \in \mathcal{L}_{\mathrm{tail}}(n)$ がわかる．

(T3) 任意の $a \in \mathcal{C}(n', n)$ と $R \in \mathcal{L}_{\text{tail}}(n)$ に対して，sieve $a^{-1}R \subseteq \mathcal{C}(-, n')$ を考える．$n' < n$ のとき，$\mathcal{C}$ が positively graded であるから $\text{Hom}(n', n) = 0$ であるので $a = 0$ となる．このとき

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(-, n') \arrow[r, "\text{id}"] \arrow[d] & \mathcal{C}(-, n') \arrow[d, "a \circ - = 0"] \\
R \arrow[r, hook] & \mathcal{C}(-, n)
\end{tikzcd}$$

が pullback 図式になるから $a^{-1}R = \mathcal{C}(-, n')$ であり，特に $a^{-1}R \in \mathcal{L}_{\text{tail}}(n')$ がわかる．

$n' \geq n$ のとき，$R \in \mathcal{L}_{\text{tail}}(n)$ よりある $k \geq n$ が存在して

$$\mathcal{C}(-, n)_{\geq k} \subseteq R$$

となる．$n' \geq k$ なら $\mathcal{C}(-, n)_{\geq n'} \subseteq \mathcal{C}(-, n)_{\geq k} \subseteq R$ が成り立つから，必要なら k を n' に取り代えることによって，$k \geq n'$ であるとしてよい．pullback 図式

$$\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & a^{-1}R \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathcal{C}(-, n') \arrow[d, "a \circ -"] \\
\mathcal{C}(-, n)_{\geq k} \arrow[r, hook] & R \arrow[r, hook] & \mathcal{C}(-, n)
\end{tikzcd}$$

を考えると可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(-, n')_{\geq k} \arrow[r, hook] \arrow[d, "a \circ -"'] & \mathcal{C}(-, n') \arrow[d, "a \circ -"] \\
\mathcal{C}(-, n)_{\geq k} \arrow[r, hook] & \mathcal{C}(-, n)
\end{tikzcd}$$

から普遍性により

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(-, n')_{\geq k} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, dashed] & & \mathcal{C}(-, n') \\
& S' \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\mathcal{C}(-, n')_{\geq k} \to S'$ が存在する．特にこれは単射で，よって $\mathcal{C}(-, n')_{\geq k} \subseteq S' \subseteq a^{-1}R$ となり，$a^{-1}R \in \mathcal{L}_{\text{tail}}(n')$ がわかる． $\square$

命題 2.9 によって $\mathcal{C}$ 上の linear pretopology は $\mathsf{Mod}(\mathcal{C})$ の prelocalizing 部分圏 $\mathcal{D}$ と対応するのであった．linear pretopology $\mathcal{L}_{\text{tail}}$ に対応する prelocalizing 部分圏がどんな部分圏になるかを考えてみよう．命題 2.9 より対応する部分圏 $\mathcal{D}$ は

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathsf{Mod}(\mathcal{C}) \mid \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in M_n,\ \text{Ann}(x) \in \mathcal{L}_{\text{tail}}(n)\}$$

で与えられる．ここで

$$\begin{aligned}
&\text{Ann}(x) = \text{Ker}(u_x) \in \mathcal{L}_{\text{tail}}(n) \\
&\iff \exists k \geq n, \quad \mathcal{C}(-, n)_{\geq k} \subseteq \text{Ker}(u_x) \\
&\iff \exists k \geq n, \forall m \geq k, \forall a \in \mathcal{C}(m, n),\ u_x(a) = xa = 0
\end{aligned}$$

であるから

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathsf{Mod}(\mathcal{C}) \mid \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in M_n,\ \exists k \geq n, \forall m \geq k, \forall a \in \mathcal{C}(m,n),\ xa = 0\}$$

となる．このような部分圏 $\mathcal{D}$ は，次のようにして特徴づけることができる．

定義 3.11. $\mathbb{Z}$-algebra $\mathcal{C}$ 上の加群 M に対して, M が**右に有界** (*right bounded*) であるとは, $n \gg 0$ に対して $M_n = 0$ をみたすときをいう．右に有界な加群のなす部分圏を $\mathsf{Rbbd}(\mathcal{C}) \subseteq \mathsf{Mod}(\mathcal{C})$ と表す．加群 M が右に有界な加群の有向余極限で表せるとき，*torsion* であるという．torsion 加群のなす部分圏を $\mathsf{Tors}(\mathcal{C}) \subseteq \mathsf{Mod}(\mathcal{C})$ と表す．

補題 3.12. $\mathbb{Z}$-algebra $\mathcal{C}$ 上の加群 M に対して，M が torsion であることは

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in M_n,\ \exists n_0, \forall m \geq n_0, \forall a \in \mathcal{C}(m,n),\ xa = 0$$

をみたすことと同値である．

Proof. 定義より明らか． □

これにより positively graded な $\mathbb{Z}$-algebra $\mathcal{C}$ 上の linear pretopology $\mathcal{L}_{\mathrm{tail}}$ に対応する prelocalizing 部分圏は $\mathsf{Tors}(\mathcal{C})$ であることがわかる．

定義 3.13. $\mathcal{C}$ を positively graded な $\mathbb{Z}$-algebra とする．$\mathcal{L}_{\mathrm{tail}}$ を含む最小の linear topology を $\mathcal{C}$ 上の *tail topology* といい，$\mathcal{T}_{\mathrm{tail}}$ で表す．

一般に $\mathcal{L}_{\mathrm{tail}}$ は linear topology ではなく，$\mathcal{L}_{\mathrm{tail}} = \mathcal{T}_{\mathrm{tail}}$ になるとは限らない．

命題 3.14. positively graded な $\mathbb{Z}$-algebra $\mathcal{C}$ に対して，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{tail}} \text{ は linear topology である} \iff \mathsf{Tors}(\mathcal{C}) \text{ は localizing 部分圏である}$$

である．さらにこのとき

$$\mathsf{Mod}(\mathcal{C})/\mathsf{Tors}(\mathcal{C}) \simeq \mathsf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{L}_{\mathrm{tail}})$$

が成り立つ．

Proof. 命題 2.9 より従う． □

いつ $\mathsf{Tors}(\mathcal{C})$ が localizing 部分圏になり，$\mathcal{L}_{\mathrm{tail}}$ が linear topology になるかについては，次の十分条件が知られている．

補題 3.15. positively graded な $\mathbb{Z}$-algebra $\mathcal{C}$ に対し，すべての $n, k \in \mathbb{Z}$ について $\mathcal{C}(-,n)_{\geq k}$ が有限生成ならば，$\mathsf{Tors}(\mathcal{C})$ は localizing である．

Proof. [DL11, Lem. 3.7] □

この十分条件は例えば

- $\mathcal{C}$ は connected[*3]かつ $\mathbb{Z}$-algebra として有限生成である
- $\mathcal{C}$ は noetherian である

のような場合に成り立つ ([DL11, §3.3]).

4 加法的層の圏としての $\mathsf{Qcoh}(\mathrm{Proj}(S))$

$\mathbb{N}$-次数付き可換環 S に対して，スキーム $\mathrm{Proj}(S)$ が構成できる．これを S の**射影スキーム** (*projective scheme*) と呼ぶ．スキーム X に対して，その上の準連接層のなす圏 $\mathsf{Qcoh}(X)$ を考えることでアーベル圏が得られる．特に射影スキーム $\mathrm{Proj}(S)$ 上の準連接層のなす圏 $\mathsf{Qcoh}(\mathrm{Proj}(S))$ は Grothendieck 圏になることが知られている．したがって圏 $\mathsf{Qcoh}(\mathrm{Proj}(S))$ はある linear site 上の加法的層の圏としての表示を持つことになる．本節では，S が S_0-代数として S_1 で有限生成されているとき，前節でみた S 上の tail topology が $\mathsf{Qcoh}(\mathrm{Proj}(S))$ を実現する linear site を定めることを確認する．

射影スキームについて軽く復習しておく．$\mathbb{N}$-次数付き可換環 $S = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$ に対して，$S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$ とおくとこれは S のイデアルである．S_+ を含まないような斉次素イデアル全体の集合を $\mathrm{Proj}(S)$ と表す．S の斉次元 f に対して

$$D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

と置くとき，$\mathrm{Proj}(S)$ 上には $D_+(f)$ たち全体を開基とする位相が定まる．さらに $\mathrm{Proj}(S)$ 上の可換環の層 $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S)}$ が

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S)}(D_+(f)) = S_{(f)}$$

をみたすように定義できる．ここで $S_{(f)}$ は，次数付き可換環の局所化 S_f の 0 次の元からなる可換環 $(S_f)_0$ である．これによりスキーム $\mathrm{Proj}(S) = (\mathrm{Proj}(S), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S)})$ が得られる．

S 上の次数付き加群 M に対して，$\mathrm{Proj}(S)$ 上の準連接層 $\widetilde{M}$ が

$$\widetilde{M}(D_+(f)) = M_{(f)}$$

をみたすように定義できる．ここで $M_{(f)}$ は，次数付き加群の局所化 M_f の 0 次の元からなる加群 $(M_f)_0$ である．

命題 4.1 ([EGA2, Prop. 2.5.4])**.** 対応 $M \mapsto \widetilde{M}$ は，完全な加法関手

$$(\widetilde{-})\colon \mathsf{GrMod}(S) \longrightarrow \mathsf{Qcoh}(\mathrm{Proj}(S))$$

を与える．

[*3] すべての $n \in \mathbb{Z}$ について $\mathrm{Hom}(n, n) \cong \mathbb{Z}$ である．

命題 4.2 ([EGA2, Prop. 2.6.5])**.** 関手 $(\widetilde{-})$ は右随伴

$$\Gamma_*\colon \mathsf{Qcoh}(\mathrm{Proj}(S)) \longrightarrow \mathsf{GrMod}(S)$$

を持つ．

命題 4.3 ([EGA2, Prop. 2.7.5], [Har77, Ch. II, Prop. 5.15])**.** $\mathbb{N}$-次数付き可換環 S が S_0-代数として S_1 で有限生成されているとき，随伴 $(\widetilde{-}) \dashv \Gamma_*$ の counit

$$\varepsilon\colon (\Gamma_*(\mathcal{F}))^{\sim} \to \mathcal{F}$$

は同型である．したがって右随伴 Γ_* は充満忠実である．

これよりアーベル圏論の一般論 (定理 2.10) から次がわかる．

系 4.4. $\mathbb{N}$-次数付き可換環 S が S_0-代数として S_1 で有限生成されているとき，

$$\mathsf{GrMod}(S)/\operatorname{Ker}(\widetilde{-}) \simeq \mathsf{Qcoh}(\mathrm{Proj}(S))$$

が成り立つ．

命題 4.5 ([EGA2, Prop. 2.5.6])**.** $\mathbb{N}$-次数付き可換環 S 上の次数付き加群 M を考える．各斉次元 $f \in S_+$ と元 $x \in M$ について $f^k x = 0$ となる k が存在するならば，$\widetilde{M} = 0$ が成り立つ．

さらに S が S_0-代数として S_1 で生成されているとき，逆が成り立つ．

Proof. 層は開基上の値で一意に定まることから

$$\widetilde{M} = 0 \iff \text{任意の斉次元 } f \in S_+ \text{ に対して } M_{(f)} = (M_f)_0 = 0$$

である．よって前半は明らか．

S が S_0-代数として S_1 で生成されているとする．$\widetilde{M} = 0$ のとき斉次元 $f \in S_1$ に対して $M_{(f)} = 0$ であるので，任意の n 次斉次元 $x \in M_n$ に対して M_f の元として $x/f^n = 0$，すなわち自然数 k が存在して $f^k x = 0$ となる．今，S のすべての斉次元は有限個の S_1 の元の S_0 係数多項式の形で表せることから，任意の斉次元 $f \in S_+$ と $x \in M$ に対し，十分大きな自然数 k を取れば $f^k x = 0$ となる． □

系 4.6. $\mathbb{N}$-次数付き可換環 S が S_0-代数として S_1 で有限生成されているとき，

$$\operatorname{Ker}(\widetilde{-}) = \mathsf{Tors}(S)$$

が成り立ち，特に $\mathsf{Tors}(S)$ は $\mathsf{GrMod}(S)$ の localizing 部分圏である．ここで $\mathsf{Tors}(S)$ は定義 3.11 の意味での torsion 加群のなす部分圏である．

Proof. 補題 3.12 より，次数付き S-加群 M が torsion であるのは

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in M_n,\ \exists n_0, \forall d \geq n_0, \forall a \in S_d,\ ax = 0$$

が成り立つときである．M が torsion であるとき，明らかに命題 4.5 の十分条件が成り立つから，$\widetilde{M} = 0$ がわかる．

次数付き S-加群 M について $\widetilde{M} = 0$ が成り立つとする．任意の $n \in \mathbb{Z}$ と $x \in M_n$ を取る．S の S_0-代数としての生成元を $f_1, \ldots, f_l \in S_1$ とすると，命題 4.5 より自然数 $k_1, \ldots, k_l$ が存在して $f_1^{k_1}x = \cdots = f_l^{k_l}x = 0$ となる．S の任意の斉次元は $f_1, \ldots, f_l$ の S_0 係数多項式の形で表せるから，自然数 d を十分大きく取ることで $S_d \cdot x = 0$ が成り立つようにできる．したがって M は torsion である． □

以上と命題 3.14 より，S_0-代数として S_1 で有限生成されている $\mathbb{N}$-次数付き可換環 S に対して

$$\mathsf{Qcoh}(\mathrm{Proj}(S)) \simeq \mathsf{GrMod}(S)/\operatorname{Ker}(\widetilde{-}) = \mathsf{GrMod}(S)/\mathsf{Tors}(S) \simeq \mathsf{Sh}(S, \mathcal{L}_{\mathrm{tail}})$$

が成り立ち，射影スキーム $\mathrm{Proj}(S)$ 上の準連接層のなす圏 $\mathsf{Qcoh}(\mathrm{Proj}(S))$ は $\mathbb{Z}$-algebra S 上に定まる tail topology $\mathcal{L}_{\mathrm{tail}}$ に関する加法的層の圏として得られることが分かった[*4].

5　結びに：非可換射影スキーム

4 節では，射影スキーム $\mathrm{Proj}(S)$ 上の準連接層のなす圏 $\mathsf{Qcoh}(\mathrm{Proj}(S))$ が，S 上に標準的に定まる linear topology に関する加法的層の圏として実現できることを確認した．言い換えると，良い $\mathbb{N}$-次数付き可換環に対しては,

$$S \mapsto \mathrm{Proj}(S) \mapsto \mathsf{Qcoh}(\mathrm{Proj}(S))$$

という $\mathbb{N}$-次数付き可換環からスキームを経てアーベル圏を得る構成は，スキーム $\mathrm{Proj}(S)$ を経ることなく

$$S \mapsto \mathsf{Sh}(S, \mathcal{L}_{\mathrm{tail}}) \simeq \mathsf{GrMod}(S)/\mathsf{Tors}(S)$$

にという対応によって直接手に入れることができる．この事実から，positively graded な $\mathbb{Z}$-algebra $\mathcal{C}$ に対してアーベル圏

$$\mathsf{Qmod}(\mathcal{C}) \coloneqq \mathsf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{T}_{\mathrm{tail}})$$

は $\mathcal{C}$ 上の *category of quasi-coherent sheaves* と呼ばれる．なお，実用上では $\mathcal{L}_{\mathrm{tail}}$ が linear topology になっている場合を扱うことがほとんどで，そうした場合 linear Grothendieck topology の用語を持ち出さずに $\mathsf{Qmod}(\mathcal{C}) = \mathsf{GrMod}(\mathcal{C})/\mathsf{Tors}(\mathcal{C})$ で定義することが多い．

一方で，準コンパクトかつ準分離的なスキーム X に対しては，その上の準連接層のなすアーベル圏 $\mathsf{Qcoh}(X)$ からもとのスキーム X を復元できることが知られている．この意味で準連接層の

[*4] [Low12] ではもう少し一般に一つの ample line bundle が生成する $\mathbb{Z}$-algebra で考えている．

圏 $\mathsf{Qcoh}(X)$ はもとの空間 X と等価な情報を内包しており，アーベル圏 $\mathsf{Qcoh}(X)$ 自体を一種の「空間」だとみなすことができる．

この考えを踏まえると，$\mathbb{Z}$-algebra $\mathcal{C}$ から得られる圏 $\mathsf{Qmod}(\mathcal{C})$ もまた一種の空間を表すようなアーベル圏になっていると考えることができる．アーベル圏 $\mathsf{Qmod}(\mathcal{C})$ は，射影スキーム上の準連接層のアーベル圏を含むことから，（可換環をベースにした通常のスキームから得られるアーベル圏の枠を超えているという意味で）**非可換射影スキーム** (*noncommutative projective scheme*) と呼ばれる．$\mathsf{Qcoh}(X)$ のアーベル圏としての変形が $\mathbb{Z}$-algebra で記述できることがわかるなど，“非可換な” 空間の範囲に広げて考えることで “可換” の枠ではできなかった現象 (変形) が捉えられるようになるといった利点がある．非可換代数幾何学の詳細については，[毛利 10; 大川 17] やそこで挙げられている文献を見てください．

参考文献

[BQ96] Francis Borceux and Carmen Quinteiro. “A theory of enriched sheaves”. In: *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* 37 (1996), no. 2, pp. 145–162. (Cit. on pp. 2, 4.)

[DL11] Olivier De Deken and Wendy Lowen. “Abelian and derived deformations in the presence of $\mathbb{Z}$-generating geometric helices”. In: *Journal of Noncommutative Geometry* 5 (2011), no. 4, pp. 477–505. DOI: 10.4171/JNCG/83. (Cit. on pp. 10, 11.)

[EGA2] A. Grothendieck and J. Dieudonné. “Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes”. French. In: *Publications Mathématiques de Institut des Hautes Études Scientifiques* (1961), no. 8, p. 222. URL: http://www.numdam.org/item/PMIHES_1961__8__5_0/. English translation available at https://github.com/ryankeleti/ega. (Cit. on pp. 11, 12.)

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Vol. 52. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1977. (Cit. on p. 12.)

[Low04] Wendy Lowen. “A generalization of the Gabriel-Popescu theorem”. In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 190 (2004), no. 1-3, pp. 197–211. DOI: 10.1016/j.jpaa.2003.11.016. (Cit. on pp. 2, 4.)

[Low12] Wendy Lowen. “Grothendieck categories and their deformations with an application to schemes”. In: *Matemática Contemporânea* 41 (2012), pp. 27–48. (Cit. on p. 13.)

[Mur06] Daniel Murfet. *Localisation of Ringoids*. 2006. URL: http://www.therisingsea.org/notes/LocalisationOfRingoids.pdf. (Cit. on p. 6.)

[PG64] Nicolae Popesco and Pierre Gabriel. “Caractérisation des catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes”. French. In: *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences, Paris* 258 (1964), pp. 4188–4190. (Cit. on p. 2.)

[Pop73] N. Popescu. *Abelian categories with applications to rings and modules.* London Mathematical Society Monographs, No. 3. Academic Press, London-New York, 1973. (Cit. on pp. 4, 6.)

[Ste75] Bo Stenström. *Rings of quotients.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 217. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. An introduction to methods of ring theory. (Cit. on pp. 4, 6.)

[毛利 10] 毛利出.「非可換代数幾何学」. In: **数学** 62 (2010), no. 2, pp. 219–239. DOI: 10.11429/sugaku.0622219. (Cit. on p. 14.)

[大川 17] 大川新之介. 非可換代数曲面. 2017. URL: http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~okawa/papers/okawa.pdf. (Cit. on p. 14.)

[ペ 21] ペーパー (@paper3510mm). Gabriel-Popescu の定理. ver. 2021 年 2 月 15 日. URL: https://paper3510mm.github.io/pdf/Gabriel_Popescu.pdf. (Cit. on p. 2.)