加群の複体の圏上のモデル圏構造 *

@paper3510mm†

2021 年 12 月 6 日

概要

加群の複体の圏に入るモデル圏構造について解説する．

目次

1 加群の複体の圏に入るモデル圏構造

単射のクラスを Inj，全射のクラスを Surj と表す．モデル圏の基礎に関して，[ぺ 21] の三章までの知識を仮定する．

1.1 概要

k を可換環，$\mathsf{Ch}(k) \coloneqq \mathsf{Ch}(\mathsf{Mod}(k))$ を k-加群の (余) 鎖複体のなす圏とする（複体の微分は次数が上昇するような，コホモロジカルな記法を用いる）．$\mathsf{Ch}(k)$ は完備かつ余完備なアーベル圏である．詳しくは [中岡 15] を見よ．

k-加群の複体の間の射 $f\colon X \to Y$ について，f が**擬同型** (*quasi-isomorphism*) であるとは，各 $n \in \mathbb{Z}$ において n 次コホモロジーに誘導される射

$$H^n(f)\colon H^n(X) \to H^n(Y)$$

がすべて同型であるときをいう．加群の複体は，この擬同型の違いを無視して扱いたい．すなわち加群の複体の間の擬同型は “同型” であると思いたいのである．そのような状況を扱うための枠組みが，モデル圏である．本稿では，k-加群の複体の圏 $\mathsf{Ch}(k)$ に擬同型を弱同値とするモデル圏構造

* 本稿は Math Advent Calender 2021 (https://adventar.org/calendars/6146) の 6 日目の記事です．
† https://paper3510mm.github.io/notes.

を導入する．

モデル圏の基礎事項は [Hov99] や [ぺ 21] を参照のこと．[Hov99, Thm. 2.1.19] や [Hir03, Thm. 11.3.1] (あるいは [ぺ 21, 3.3 節]) より次が成り立つ．

定理 1.1. 完備かつ余完備な圏 $\mathcal{C}$，射の集合 I, J，恒等射を含む射のクラス $\mathcal{W}$ を考える．次が成り立つとする：

(a) $\mathcal{W}$ は (2-out-of-3) をみたし，retract で閉じる
(b) I に属する射の domain は small with respect to $\mathrm{Cell}(I)$ である
(c) J に属する射の domain は small with respect to $\mathrm{Cell}(J)$ である
(d) $\mathrm{Cell}(J) \subseteq \mathrm{LLP}(\mathrm{RLP}(I)) \cap \mathcal{W}$ [*1]
(e) $\mathrm{RLP}(I) = \mathrm{RLP}(J) \cap \mathcal{W}$

このとき圏 $\mathcal{C}$ は，I を generating cofibration の集合，J を generating acyclic cofibration の集合，$\mathcal{W}$ を弱同値のクラスとするような cofibrantly generated なモデル圏になる．

したがって，$\mathsf{Ch}(k)$ 上にモデル圏構造を定めるには，定理 1.1 の条件をみたすような $I, J, \mathcal{W}$ を定めればよい．今は擬同型を弱同値としたいので，

$$\mathcal{W} := \mathrm{Qism} = \{\text{ 擬同型 }\}$$

と設定する．次に射の集合 I, J を考える．

定義 1.2. k-加群 M に対して，M の n-**次球面対象** (*n-th shpere object*) $S^n(M)$ を，n 次の項に M があり，それ以外の項はすべて 0 であるような

$$S^n(M)\colon \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

という複体として定義する．特に $M = k$ のとき，$S^n_k := S^n(k)$ と表す．

また k-加群 M に対して，M の n-**次円板対象** (*n-th disk object*) $D^n(M)$ を，$n-1$ 次と n 次の項に M があり，n 次の微分が id_M で，それ以外の項はすべて 0 であるような

$$D^n(M)\colon \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{id}_M} M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

という複体として定義する．特に $M = k$ のとき，$D^n_k := D^n(k)$ と表す．

[*1] 条件 $\mathrm{Cell}(J) \subseteq \mathrm{LLP}(\mathrm{RLP}(I))$ の部分は，(e) から導出可能である．一般に $\mathrm{RLP}(I) \subseteq \mathrm{RLP}(J)$ ならば，$\mathrm{LLP}(\mathrm{RLP}(J)) \subseteq \mathrm{LLP}(\mathrm{RLP}(I))$ であり，これと $\mathrm{Cell}(J) \subseteq \mathrm{LLP}(\mathrm{RLP}(J))$ であることから，$\mathrm{Cell}(J) \subseteq \mathrm{LLP}(\mathrm{RLP}(I))$ がわかる．よって (e) のもと，(d) は条件 $\mathrm{Cell}(J) \subseteq \mathcal{W}$ と同値である．

注意 1.3. 球面対象 $S^n(M)$ と円板対象 $D^n(M)$ について，

$$Z^m(S^n(M)) = \begin{cases} M & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}, \qquad Z^m(D^n(M)) = \begin{cases} M & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases},$$
$$H^m(S^n(M)) = \begin{cases} M & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}, \qquad H^m(D^n(M)) = 0 \qquad (m \in \mathbb{Z}),$$

である．特に円板対象 $D^n(M)$ は**非輪状** (*acyclic*) である．

自然に単射 $\iota_n \colon S^n(M) \hookrightarrow D^n(M)$ が存在する．このとき

$$I \coloneqq \{\iota_n \colon S^n_k \hookrightarrow D^n_k \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad J \coloneqq \{0 \hookrightarrow D^n_k \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

と設定する．以上のとき，k-加群の複体の圏 $\mathsf{Ch}(k)$ には次のようなモデル圏構造が定まる．

定理 1.4 ($\mathsf{Ch}(k)$ 上の射影的モデル構造)**.** k-加群の複体の圏 $\mathsf{Ch}(k)$ に対して，

$$\mathcal{W} \coloneqq \mathrm{Qism} = \{\text{ 擬同型 }\}, \quad I \coloneqq \{S^n_k \hookrightarrow D^n_k \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad J \coloneqq \{0 \hookrightarrow D^n_k \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

と定めるとき, $\mathsf{Ch}(k)$ は I を generating cofibration の集合, J を generating acyclic cofibration の集合, $\mathcal{W}$ を弱同値のクラスとするような cofibrantly generated なモデル圏になる．このモデル圏構造を $\mathsf{Ch}(k)$ 上の**射影的モデル構造** (*projective model structure*) と呼ぶ．さらにこのモデル圏において次が成り立つ．

(i) $\mathrm{Fib} = \mathrm{RLP}(J) = \mathrm{Surj}$

(ii) $\mathrm{Fib} \cap \mathcal{W} = \mathrm{RLP}(I) = \mathrm{Surj} \cap \mathrm{Qism}$

(iii) $\mathrm{Cof} = \mathrm{LLP}(\mathrm{RLP}(I)) = \mathrm{LLP}(\mathrm{Surj}) = \{\text{cofibrant な余核を持つ単射 }\}$

(iv) $\mathrm{Cof} \cap \mathcal{W} = \mathrm{LLP}(\mathrm{RLP}(J)) = \mathrm{LLP}(\mathrm{Surj} \cap \mathrm{Qism}) = \{\text{ 射影的な余核を持つ単射 }\}$

(v) すべての複体は fibrant である．

(vi) 複体が cofibrant ならば，複体の各項は射影加群になる．

(vii) 複体が射影的であることと，cofibrant かつ acyclic であることは同値である．

この定理を確認する (定理 1.20).

1.2 証明

定理 1.1 の条件を順に確認していく．

整数 n について，複体の n 次の項を取り出す関手を

$$(-)^n \colon \mathsf{Ch}(k) \to \mathsf{Mod}(k)$$

とし，複体の n 次コチェインをとる関手を

$$Z^n \colon \mathsf{Ch}(k) \to \mathsf{Mod}(k)$$

とし，複体の n 次コホモロジーをとる関手を

$$H^n \colon \mathsf{Ch}(k) \to \mathsf{Mod}(k)$$

とする．まず擬同型のクラスについて次がわかる．

命題 1.5. 擬同型のクラス Qism は，同型射を含み，(2-out-of-3) をみたし，retract で閉じる．

Proof. 擬同型の定義より

$$\mathrm{Qism} = \{ f \colon X \to Y \mid \forall n \in \mathbb{Z},\ H^n(f) \text{ は同型} \}$$

であるから，H^n が関手であることと同型射のクラスが (2-out-of-3) をみたし retract で閉じることより主張が従う． □

命題 1.6. k-加群 M と複体 X ついて，全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(S^n(M), X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(k)}(M, Z^n(X)),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(D^{n+1}(M), X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(k)}(M, X^n)$$

が存在する．これは M, X について自然で，随伴 $S^n(-) \dashv Z^n$，$D^{n+1}(-) \dashv (-)^n$ が成り立つ．

Proof. 複体の準同型 $f \colon S^n(M) \to X$ は，

$$\begin{tikzcd}
S^n(M)\colon \arrow[d, "f"'] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f^n"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+2}"'] & \cdots \\
X \ \colon & \cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"'] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"'] & X^{n+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

というものである．$m \neq n$ においては $f^m = 0$ であり，f^n は $d_X^n \circ f^n = 0$ をみたす．つまり f^n は $Z^n(X) \subseteq X^n$ を経由して一意的に分解し，k-加群の準同型 $f^n \colon M \to Z^n(X)$ を誘導する．逆に，任意の複体の準同型 $f \colon S^n(M) \to X$ は，$f^n \colon M \to Z^n(X)$ から一意的に決定されるので，全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(S^n(M), X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(k)}(M, Z^n(X))$$

が得られる．

また複体の準同型 $f \colon D^{n+1}(M) \to X$ は，

$$\begin{tikzcd}
D^{n+1}(M)\colon \arrow[d, "f"'] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & M \arrow[r, "\mathrm{id}_M"] \arrow[d, "f^n"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+2}"'] & \cdots \\
X \ \colon & \cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"'] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"'] & X^{n+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

というものである．$m \neq n, n+1$ においては $f^m = 0$ であり，f^n と f^{n+1} は $d_X^n \circ f^n = f^{n+1}$ をみたす．逆に，任意の複体の準同型 $f \colon D^{n+1}(M) \to X$ は，$f^n \colon M \to X^n$ から一意的に決定され

るので，全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(D^{n+1}(M), X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(k)}(M, X^n)$$

が得られる． □

命題 1.7. k-加群 M と複体 A ついて，全単射

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(A, S^n(M)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(k)}(\mathrm{Cok}(d_A^{n-1}), M),\\ \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(A, D^n(M)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(k)}(A^n, M)\end{aligned}$$

が存在する．これは M, A について自然で，随伴 $\mathrm{Cok}(d_-^{n-1}) \dashv S^n(-)$，$(-)^n \dashv D^n(-)$ が成り立つ．

Proof. 複体の準同型 $f\colon A \to S^n(M)$ は，

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & : & \cdots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & A^n \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[d, "f^n"'] & A^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & \cdots \\ S^n(M) & : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

というものである．$m \neq n$ においては $f^m = 0$ であり，f^n は $f^n \circ d_A^{n-1} = 0$ をみたす．つまり f^n は $A^n \twoheadrightarrow \mathrm{Cok}(d_A^{n-1})$ を経由して一意的に分解し，k-加群の準同型 $\overline{f^n}\colon \mathrm{Cok}(d_A^{n-1}) \to M$ を誘導する．逆に，任意の複体の準同型 $f\colon A \to S^n(M)$ は，$\overline{f^n}\colon \mathrm{Cok}(d_A^{n-1}) \to M$ から一意的に決定されるので，全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(A, S^n(M)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(k)}(\mathrm{Cok}(d_A^{n-1}), M)$$

が得られる．

また複体の準同型 $f\colon A \to D^n(M)$ は，

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & : & \cdots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & A^n \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[d, "f^n"'] & A^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & \cdots \\ D^n(M) & : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\mathrm{id}_M"'] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

というものである．$m \neq n-1, n$ においては $f^m = 0$ であり，f^{n-1} と f^n は $f^{n-1} = f^n \circ d_A^{n-1}$ をみたす．逆に，任意の複体の準同型 $f\colon A \to D^n(M)$ は，$f^n\colon A^n \to M$ から一意的に決定されるので，全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(A, D^n(M)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(k)}(A^n, M)$$

が得られる． □

命題 1.8. 複体の準同型 $f\colon X \to Y$ に対して，f が $J = \{0 \to D_k^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に関して右リフト性質を持つことと，f が全射であることは同値である．すなわち，$\mathrm{RLP}(J) = \mathrm{Surj}$ である．

Proof. 命題 1.6 に注意すると，複体の準同型 $f\colon X \to Y$ に対して可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ D_k^{n+1} \arrow[r, "v"] & Y \end{tikzcd}$$

は，k-加群の準同型 $\overline{v}\colon k \to Y^n$，つまり元 $y := \overline{v}(1) \in Y^n$ に一対一に対応し，この可換図式のリフト $s\colon D_k^{n+1} \to X$ が存在することは，$f^n(x) = y$ となる $x \in X^n$ が存在することに対応する．したがって f が J に関して右リフト性質をみたすことは，各 $n \in \mathbb{Z}$ について f^n が全射であるということと同値であり，すなわち f が全射であることと同値である． □

> **命題 1.9.** 複体の準同型 $f\colon X \to Y$ に対して，f が $I = \{S_k^n \to D_k^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に関して右リフト性質を持つことと，f が全射かつ擬同型であることは同値である．すなわち，$\mathrm{RLP}(I) = \mathrm{Surj}\cap\mathrm{Qism}$ である．

Proof. 命題 1.6 に注意すると，複体の準同型 $f\colon X \to Y$ に対して可換図式

$$\begin{tikzcd} S_k^{n+1} \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ D_k^{n+1} \arrow[r, "v"] & Y \end{tikzcd}$$

は，$f^{n+1}(x) = d_Y^n(y)$ をみたす元の組 $(y, x) \in Y^n \oplus Z^{n+1}(X)$ に一対一に対応し，この可換図式のリフト $s\colon D_k^{n+1} \to X$ が存在することは，$d_X^n(x') = x$ かつ $f^n(x') = y$ となる $x' \in X^n$ が存在することに対応する．

(⇒): f が $I = \{S_k^n \to D_k^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に関して右リフト性質を持つとする．まず f が全射であることを示そう．任意の $y \in Y^n$ を取るとき，元の組 $(y, 0) \in Y^n \oplus Z^{n+1}(X)$ は上の可換図式を定めるから，$d_X^n(x') = 0$ かつ $f^n(x') = y$ となる $x' \in X^n$ が存在する．よって各 f^n は全射であり，f が全射であることがわかる．特に $y \in Z^n(Y)$ に対しては，$f^n(x') = y$ となる $x' \in Z^n(X)$ が存在することになり，これより $Z^n(f)\colon Z^n(X) \to Z^n(Y)$ も全射である．よって $H^n(f)\colon H^n(X) \to H^n(Y)$ が全射であることがわかる．

次に f が擬同型であることを示す．各 $H^n(f)\colon H^n(X) \to H^n(Y)$ が全射であることはみたので，$H^n(f)$ が単射であることを示せばよい．任意の $x \in Z^n(X)$ に対して，$H^n(f)(x) = 0$ であるとする．このとき $f^n(x) = d_Y^{n-1}(y)$ となる $y \in Y^{n-1}$ が存在する．元の組 $(y, x) \in Y^{n-1} \oplus Z^n(X)$ は上の可換図式を定めるから，$d_X^{n-1}(x') = x$ かつ $f^{n-1}(x') = y$ となる $x' \in X^{n-1}$ が存在する．$d_X^{n-1}(x') = x$ であることは，x が $H^n(X)$ のなかで 0 であるということを意味し，したがって $H^n(f)$ は単射である．

(⇐): f が全射かつ擬同型であるとする．$K = \mathrm{Ker}(f)$ とおくと，短完全列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$$

が存在する．この短完全列のコホモロジー長完全系列を取ることで $H^{n+1}(K)=0$ であることがわかる．$f^{n+1}(x)=d_Y^n(y)$ をみたす元の組 $(y,x)\in Y^n\oplus Z^{n+1}(X)$ を任意に取る．f は全射であるから，$f^n(x')=y$ となる $x'\in X^n$ がとれる．このとき

$$f^{n+1}(x)=d_Y^n(y)=d_Y^n(f^n(x'))=f^{n+1}(d_X^n(x'))$$

となるから $x-d_X^n(x')\in K^{n+1}$ である．$x, d_X^n(x')\in Z^{n+1}(X)$ だから $x-d_X^n(x')\in Z^{n+1}(K)$ でもある．今 $H^{n+1}(K)=0$ であるから，$d_X^n(x'')=x-d_X^n(x')$ となる $x''\in K^n\subseteq X^n$ が存在する．すると $x'+x''\in X^n$ が $d_X^n(x'+x'')=x$ かつ $f^n(x'+x'')=y+0=y$ をみたすことがわかる．したがって f は I に関して右リフト性質を持つ． □

定義 1.10. 複体の準同型 $0\to A$ が全射な擬同型に対して左リフト性質を持つ，つまり $(0\to A)\in \mathrm{LLP}(\mathrm{Surj}\cap\mathrm{Qism})$ であるとき，A は *cofibrant* であると呼ぶことにする．

これは $\mathrm{LLP}(\mathrm{Surj}\cap\mathrm{Qism})=\mathrm{LLP}(\mathrm{RLP}(I))$ がいずれ cofibration のクラスになることを期待した命名法である．

命題 1.11. 複体 A が cofibrant ならば，各 $n\in\mathbb{Z}$ について A^n は射影 k-加群である．

Proof. k-加群の準同型 $f\colon A^n\to M$ と全射準同型 $g\colon M\to N$ を取る．命題 1.7 より f は $v\colon A\to D^n(N)$ に対応する．今 A は cofibrant で $D^n(g)\colon D^n(M)\to D^n(N)$ は全射かつ擬同型であるから，可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & D^n(M) \arrow[d, "D^n(g)"] \\ A \arrow[r, "v"'] & D^n(N) \end{tikzcd}$$

に対してリフト $s\colon A\to D^n(M)$ が存在する．このとき $g\circ s^n=v^n=f$ となる．よって A^n は射影加群である． □

各項 A^n が射影加群であるからといって，複体 A が $\mathsf{Ch}(k)$ において射影的であるとは限らないことに注意する．

命題 1.12. 複体の圏 $\mathsf{Ch}(k)$ において，$\mathrm{LLP}(\mathrm{Surj})\subseteq\mathrm{LLP}(\mathrm{Surj}\cap\mathrm{Qism})\subseteq\mathrm{Inj}$ が成り立つ．

Proof. $\mathrm{Surj}\cap\mathrm{Qism}\subseteq\mathrm{Surj}$ であるから，$\mathrm{LLP}(\mathrm{Surj})\subseteq\mathrm{LLP}(\mathrm{Surj}\cap\mathrm{Qism})$ はわかる．$\mathrm{LLP}(\mathrm{Surj}\cap\mathrm{Qism})$ に属する射 $i\colon A\to B$ を取る．随伴 $(-)^n\dashv D^n$ の単位射 $\eta\colon A\to D^n(A^n)$ を考えると，これは

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & : & \cdots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d, "0"'] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] \arrow[d, "d_A^{n-1}"'] & A^n \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{A^n}"'] & A^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & \cdots \\ D^n(A^n) & : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A^n \arrow[r, "\mathrm{id}_{A^n}"'] & A^n \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

という準同型である．今 $D^n(A^n) \to 0$ は全射な擬同型であるから，可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "i"'] & D^n(A^n) \arrow[d] \\ B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

に対してリフト $s\colon B \to D^n(A^n)$ が存在する．このとき $s^n \circ i^n = \eta^n = \mathrm{id}_{A^n}$ が成り立ち，特に i^n は単射である．よって $\mathrm{LLP}(\mathrm{Surj} \cap \mathrm{Qism}) \subseteq \mathrm{Inj}$ もわかる． □

定義 1.13. 複体 K に対して，複体 $\mathcal{P}(K)$ を

$$\mathcal{P}(K)^n = K^n \oplus K^{n-1},$$

$$d^n_{\mathcal{P}(K)}\colon K^n \oplus K^{n-1} \to K^{n+1} \oplus K^n; \quad (x, y) \mapsto (d^n_K(x), x - d^{n-1}_K(y))$$

によって定める．第一成分への射影として，複体の準同型 $\pi\colon \mathcal{P}K \to K$ が存在する．

定義 1.13 のとき，$\mathrm{Ker}(\pi) = K[-1]$ であり短完全列

$$0 \longrightarrow K[-1] \longrightarrow \mathcal{P}K \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

が存在することが容易にわかる．次の補題は命題 1.18 で用いる．

補題 1.14. 複体 K と X に対して，次が成り立つ．

(i) 複体 $\mathcal{P}K$ は acyclic である．

(ii) 全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(\mathcal{P}K, X) \cong \prod_n \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(k)}(K^n, X^n)$$

が存在する．

Proof. (i) 任意の $(x, y) \in Z^n(\mathcal{P}K) \subseteq K^n \oplus K^{n-1}$ を取ると，$d^n_{\mathcal{P}(K)}(x, y) = (d^n_K(x), x - d^{n-1}_K(y)) = (0, 0)$ より，$d^n_K(x) = 0$ かつ $x = d^{n-1}_K(y)$ が成り立つ．よって $(y, 0) \in K^{n-1} \oplus K^{n-2} = \mathcal{P}(K)^{n-1}$ を考えれば，$d^{n-1}_{\mathcal{P}(K)}(y, 0) = (d^{n-1}_K(y), y - d^{n-2}_K(0)) = (x, y)$ が成り立つ．したがって各 n について $H^n(\mathcal{P}K) = 0$ であることがわかり，$\mathcal{P}K$ は acyclic である．

(ii) 複体の準同型 $f\colon \mathcal{P}K \to X$ の n 次の準同型 $f^n\colon K^n \oplus K^{n-1} \to X^n$ を，準同型 $g^n\colon K^n \to X^n$ と $h^n\colon K^{n-1} \to X^n$ を用いて $f^n = (g^n, h^n)$ と表すことにする．今 $d^n_X \circ f^n = f^{n+1} \circ d^n_{\mathcal{P}(K)}$ が成り立つことから，族 $\{g^n\}_n$ と $\{h^n\}_n$ は

$$\begin{cases} g^{n+1} \circ d^n_K + h^{n+1} = d^n_X \circ g^n \\ -h^{n+1} \circ d^{n-1}_K = d^n_X \circ h^n \end{cases}$$

をみたすことがわかる．二つ目の等式は一つ目の等式から導出できるので，

$$h^{n+1} = d^n_X \circ g^n - g^{n+1} \circ d^n_K$$

をみたしているとしてよい．

さて複体の準同型 f に対して，$\{g^n\}_n \in \prod_n \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(k)}(K^n, X^n)$ を対応させる写像を考える．上の議論より，$f^n = (g^n, h^n)$ は g^n から決定されるので，この対応は単射である．また任意の準同型の族 $\{p^n\colon K^n \to X^n\}_n$ に対して，$q^n \coloneqq d_X^{n-1} \circ p^{n-1} - p^n \circ d_K^{n-1}\colon K^{n-1} \to X^n$ と定めると準同型の族 $\{(p^n, q^n)\colon K^n \oplus K^{n-1} \to X^n\}_n$ は複体の準同型 $\mathcal{P}K \to X$ を定めることがわかるから，全射である．したがって全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(\mathcal{P}K, X) \cong \prod_n \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(k)}(K^n, X^n)$$

が存在することがわかる． □

次の補題は命題 1.16 で用いる．

補題 1.15. 複体の準同型 $f\colon C \to K$ について，C が cofibrant で K が acyclic であるとき，準同型の族 $\{H^n\colon C^n \to K^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が存在して，$f^n = d_K^{n-1} \circ H^n + H^{n+1} \circ d_C^n$ となる．

Proof. 定義 1.13 の射影 $\pi\colon \mathcal{P}K \to K$ を取る．K が acyclic であるから $\mathrm{Ker}(\pi) = K[-1]$ も acyclic で，よって π は全射な擬同型である．今 C は cofibrant であるから，可換図式

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{P}K \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ C & \xrightarrow[f]{} & K \end{array}$$

に対してリフト $g\colon C \to \mathcal{P}K$ が存在する．第二成分への射影との合成を考えることで，$g^n = (f^n, H^n)\colon C^n \to K^n \oplus K^{n-1}$ となる $H^n\colon C^n \to K^{n-1}$ が存在する．g が複体の準同型で $d_{\mathcal{P}(K)}^n \circ g^n = g^{n+1} \circ d_{\mathcal{P}(K)}^n$ が成り立つことから，

$$f^n - d_K^{n-1} \circ H^n = H^{n+1} \circ d_K^n$$

が成り立つことがわかり，主張を得る． □

命題 1.16. 複体の準同型 $i\colon A \to B$ に対して，i が全射な擬同型に関して左リフト性質を持つことと，i が単射であり，かつ複体 $\mathrm{Cok}(i)$ が cofibrant であることは同値である．すなわち，$\mathrm{LLP}(\mathrm{Surj} \cap \mathrm{Qism}) = \{\text{cofibrant な余核を持つ単射}\}$ である．

Proof. (⇒): i が全射な擬同型に関して左リフト性質を持つとする．命題 1.12 より i は単射である．また

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ B & \longrightarrow & \mathrm{Cok}(i) \end{array}$$

は pushout 図式であるから，$\mathrm{LLP}(\mathrm{Surj} \cap \mathrm{Qism})$ が pushout で閉じることより $\mathrm{Cok}(i)$ が cofibrant であることがわかる．

(⇐): 複体の単射準同型 $i\colon A \to B$ について $\mathrm{Cok}(i)$ は cofibrant であるとする．全射な擬同型 $p\colon X \to Y$ と可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

に対して，リフト $l\colon B \to X$ を具体的に構成しよう．$C \coloneqq \mathrm{Cok}(i)$，$K \coloneqq \mathrm{Ker}(p)$ とおき，自然な全射を $q\colon B \twoheadrightarrow C$，自然な単射を $j\colon K \rightarrowtail X$ とする．p が全射な擬同型であることから，K は acyclic であることに注意する．

まず，命題 1.11 より各 C^n は射影加群であるから，短完全列

$$0 \longrightarrow A^n \xrightarrow{i^n} B^n \xrightarrow{q^n} C^n \longrightarrow 0$$

は分裂し，$B^n \cong A^n \oplus C^n$ となる．$s^n \circ i^n = \mathrm{id}_{A^n}$ となる準同型 $s^n\colon B^n \to A^n$ と $q^n \circ r^n = \mathrm{id}_{C^n}$ となる準同型 $r^n\colon C^n \to B^n$ をとる．このとき $\tau^n \coloneqq s^{n+1} \circ d_B^n \circ r^n\colon C^n \to A^{n+1}$ とおくと，同型 $B^n \cong A^n \oplus C^n$ のもとで微分 $d_B^n\colon B^n \to B^{n+1}$ は

$$\begin{aligned} d_B^n(a,c) &= (d_A^n(a) + s^{n+1} \circ d_B^n \circ r^n(c), q^n \circ d_B^n \circ i^n(a) + d_C^n(c)) \\ &= (d_A^n(a) + \tau^n(c), 0 + d_C^n(c)) \\ &= (d_A^n(a) + \tau^n(c), d_C^n(c)), \qquad\qquad ((a,c) \in A^n \oplus C^n) \end{aligned}$$

という準同型と同一視できる．$d_B^{n+1} \circ d_B^n = 0$ であることから，τ^n は

$$d_A^{n+1} \circ \tau^n + \tau^{n+1} \circ d_C^n = 0 \tag{♠}$$

をみたすことに注意する．また v^n についても，$\sigma^n \coloneqq v^n \circ r^n\colon C^n \to Y^n$ とおくと，同型 $B^n \cong A^n \oplus C^n$ のもとで $v^n\colon B^n \to Y^n$ は

$$\begin{aligned} v^n(a,c) &= v^n \circ i^n(a) + v^n \circ r^n(c) \\ &= p^n \circ u^n(a) + \sigma^n(c), \qquad\qquad ((a,c) \in A^n \oplus C^n) \end{aligned}$$

という準同型と同一視できる．$v\colon B \to Y$ は複体の準同型で，$d_Y^n \circ v^n = v^{n+1} \circ d_B^n$ が成り立つことから，σ^n は

$$d_Y^n \circ \sigma^n - \sigma^{n+1} \circ d_C^n = p^{n+1} \circ u^{n+1} \circ \tau^n \tag{♡}$$

をみたすことに注意する．

さて，各 C^n は射影加群であるから，準同型 $\sigma^n\colon C^n \to Y^n$ に対して全射 $p^n\colon X^n \to Y^n$ に沿ったリフト $\alpha^n\colon C^n \to X^n$，つまり

$$\begin{tikzcd} & X^n \arrow[d, "p^n"] \\ C^n \arrow[ur, dashed, "\alpha^n"] \arrow[r, "\sigma^n"'] & Y^n \end{tikzcd}$$

を可換にする準同型 α^n が存在する．準同型 $\beta^n\colon C^n \to X^{n+1}$ を

$$\beta^n \coloneqq d_X^n \circ \alpha^n - \alpha^{n+1} \circ d_C^n - u^{n+1} \circ \tau^n$$

と定めると，式 (♠) より

$$\begin{aligned}
\beta^{n+1} \circ d_C^n &= (d_X^{n+1} \circ \alpha^{n+1} - \alpha^{n+2} \circ d_C^{n+1} - u^{n+2} \circ \tau^{n+1}) \circ d_C^n \\
&= d_X^{n+1} \circ \alpha^{n+1} \circ d_C^n - 0 - u^{n+2} \circ (-d_A^{n+1} \circ \tau^n) \\
&= d_X^{n+1} \circ \alpha^{n+1} \circ d_C^n + u^{n+2} \circ d_A^{n+1} \circ \tau^n \\
&= d_X^{n+1} \circ \alpha^{n+1} \circ d_C^n + d_X^{n+1} \circ u^{n+1} \circ \tau^n \\
&= d_X^{n+1} \circ (\alpha^{n+1} \circ d_C^n + u^{n+1} \circ \tau^n) \\
&= -d_X^{n+1} \circ \beta^n = d_{X[1]}^n \circ \beta^n
\end{aligned}$$

が成り立つから，準同型の族 $\{\beta^n\}_{n \in Z}$ は複体の準同型 $\beta \colon C \to X[1]$ を定める．さらに式 (♡) を用いると

$$\begin{aligned}
p[1]^n \circ \beta^n = p^{n+1} \circ \beta^n &= p^{n+1} \circ (d_X^n \circ \alpha^n - \alpha^{n+1} \circ d_C^n - u^{n+1} \circ \tau^n) \\
&= d_Y^{n+1} \circ p^n \circ \alpha^n - p^{n+1} \circ \alpha^{n+1} \circ d_C^n - p^{n+1} \circ u^{n+1} \circ \tau^n \\
&= d_Y^{n+1} \circ \sigma^n - \sigma^{n+1} \circ d_C^n - p^{n+1} \circ u^{n+1} \circ \tau^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

となるから，β は複体の準同型として $K[1] = \mathrm{Ker}(p[1])$ を経由して

$$\begin{tikzcd}
 & K[1] \arrow[d, "{j[1]}"] \\
C \arrow[ur, dashed, "\gamma"] \arrow[r, "\beta"'] \arrow[dr, "0"'] & X[1] \arrow[d, "{p[1]}"] \\
 & Y[1]
\end{tikzcd}$$

のように分解する．今 C は cofibrant で $K[1]$ は acyclic であるから，補題 1.15 により，

$$\begin{aligned}
\gamma^n &= d_{K[1]}^{n-1} \circ H^n + H^{n+1} \circ d_C^n \\
&= -d_K^n \circ H^n + H^{n+1} \circ d_C^n
\end{aligned} \tag{♣}$$

となる準同型の族 $\{H^n \colon C^n \to K[1]^{n-1} = K^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が存在する．$\beta^n = j^{n+1} \circ \gamma^n$ が成り立つことから，式 (♣) を使うと H^n は

$$d_X^n \circ \alpha^n - \alpha^{n+1} \circ d_C^n - u^{n+1} \circ \tau^n = j^{n+1} \circ (-d_K^n \circ H^n + H^{n+1} \circ d_C^n)$$

すなわち

$$d_X^n \circ (\alpha^n + j^n \circ H^n) = u^{n+1} \circ \tau^n + (\alpha^{n+1} + j^{n+1} \circ H^{n+1}) \circ d_C^n \tag{♢}$$

をみたすことに注意する．

以上のとき，$\lambda^n \coloneqq \alpha^n + j^n \circ H^n \colon C^n \to X^n$ とおき，同型 $B^n \cong A^n \oplus C^n$ のもとで準同型 $l^n \colon B^n \to X^n$ を

$$l^n(a, c) \coloneqq u^n(a) + \lambda^n(c), \qquad ((a, c) \in A^n \oplus C^n)$$

によって定める．このとき式 ($\diamondsuit$) により

$$\begin{aligned} d_X^n \circ l^n(a,c) &= d_X^n \circ u^n(a) + d_X^n \circ \lambda^n(c) \\ &= u^{n+1} \circ d_A^n(a) + (u^{n+1} \circ \tau^n + \lambda^{n+1} \circ d_C^n)(c) \\ &= l^{n+1} \circ (d_A^n(a) + \tau^n(c), d_C^n(c)) \\ &= l^{n+1} \circ d_B^n(a,c) \end{aligned}$$

となり，準同型の族 $\{l^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は複体の準同型 $l\colon B \to X$ を定める．この l について $l \circ i = u$ と $p \circ l = v$ が成り立つことがわかり，これが求めるリフトになる．$\square$

命題 1.17. 複体の準同型 $i\colon A \to B$ に対して，i が全射に関して左リフト性質を持つことと，i が単射であり，かつ複体 $\mathrm{Cok}(i)$ が射影的であることは同値である．すなわち，$\mathrm{LLP}(\mathrm{Surj}) = \{$ 射影的な余核を持つ単射 $\}$ である．

Proof. 複体の準同型 $i\colon A \to B$ について，$C := \mathrm{Cok}(i)$ とおき，自然な全射を $q\colon B \to C$ とする．

($\Rightarrow$): i が全射に関して左リフト性質を持つとする．命題 1.12 より i は単射である．全射 $p\colon X \to Y$ と準同型 $v\colon C \to Y$ を任意に取る．i は全射に関して左リフト性質を持つから，可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "0"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "0"] & & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "q"'] & C \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

に対してリフト $s\colon B \to X$ が存在する．$s \circ i = 0$ より

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "s"] & \\ C \arrow[r, dashed, "t"'] & X \end{tikzcd}$$

を可換にする $t\colon C \to X$ が一意に存在する．このとき $vq = ps = ptq$ となり，q の全射性から $v = pt$ が従う．よって C は複体として射影的である．

($\Leftarrow$): 複体の単射準同型 $i\colon A \to B$ について $C = \mathrm{Cok}(i)$ は射影的であるとする．全射 $p\colon X \to Y$ と可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

に対して，リフト $B \to X$ を構成しよう．$\mathrm{Cok}(i)$ が射影的であるから i は複体の準同型として分裂し，$ri = \mathrm{id}_A$ となる複体の準同型 $r\colon B \to A$ が存在する．すると $pur - v\colon B \to Y$ について

$$(pur - v)i = puri - vi = pu - pu = 0$$

より

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "pur-v"] & \\ C \arrow[r, dashed, "s"'] & Y \end{tikzcd}$$

を可換にする $s\colon C \to Y$ が一意に存在する．C は射影的であるから，$s\colon C \to Y$ に対して，$pt = s$ となる $t\colon C \to X$ が存在する．このとき

$$\begin{aligned} (ur - tq)i &= uri - tqi = u - 0 = u \\ p(ur - tq) &= pur - ptq = pur - sq = pur - pur + v = v \end{aligned}$$

となり，$ur - tq$ が求めるリフトになる． □

命題 1.18. 複体 X について，

$$X \text{ は射影的} \iff X \text{ は cofibrant かつ acyclic}$$

が成り立つ．

Proof. $(\Rightarrow)$: 複体 X が射影的であるとき，明らかに X は cofibrant である．また定義 1.13 の全射 $\pi\colon \mathcal{P}X \to X$ を考えれば，$\pi\rho = \mathrm{id}_X$ となる $\rho\colon X \to \mathcal{P}X$ が存在することがわかる．補題 1.14 より $\mathcal{P}X$ が acyclic であることから X も acyclic であることがわかる．

$(\Leftarrow)$: 複体 X が cofibrant かつ acyclic であるとする．定義 1.13 の全射 $\pi\colon \mathcal{P}X \to X$ を考えると，$X[-1] = \mathrm{Ker}(\pi)$ が acyclic であるから π は全射な擬同型である．また X が cofibrant であることから $\rho\pi = \mathrm{id}_X$ となる $\rho\colon X \to \mathcal{P}X$ が存在し，π は分裂する．特に複体の圏において $\mathcal{P}(X) \cong X \oplus \mathrm{Ker}(\pi)$ が成り立つ．

ここで，補題 1.14 により関手の同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(\mathcal{P}X, -) \cong \prod_n \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(k)}(X^n, (-)^n)$$

が成り立っている．命題 1.11 より各 X^n が射影加群であることから，関手 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(k)}(X^n, -)$ は完全関手である．$\prod_n$ も $(-)^n$ も完全であるから，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(\mathcal{P}X, -)$ も完全であり，よって $\mathcal{P}X$ は射影的な複体である．したがってその直和因子である X もまた射影的となる． □

系 1.19. 複体の圏 $\mathsf{Ch}(k)$ において，$\mathrm{LLP}(\mathrm{Surj}) \subseteq \mathrm{LLP}(\mathrm{Surj} \cap \mathrm{Qism}) \cap \mathrm{Qism}$ が成り立つ．

Proof. 複体の準同型 $i \in \mathrm{LLP}(\mathrm{Surj})$ を取ると，命題 1.12 より $i \in \mathrm{LLP}(\mathrm{Surj} \cap \mathrm{Qism})$ である．命題 1.17 より複体 $\mathrm{Cok}(i)$ は射影的であるが，命題 1.18 より $\mathrm{Cok}(i)$ は acyclic になる．よって単射 i は擬同型となり，$i \in \mathrm{Qism}$ もわかる． □

以上より，複体の圏 $\mathsf{Ch}(k)$ にモデル圏構造が入ることが証明できる．

定理 1.20. k-加群の複体の圏 $\mathsf{Ch}(k)$ に対して,

$$\mathcal{W} := \mathrm{Qism} = \{\text{ 擬同型 }\}, \quad I := \{S_k^n \hookrightarrow D_k^n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad J := \{0 \hookrightarrow D_k^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

と定めるとき, $\mathsf{Ch}(k)$ は I を generating cofibration の集合, J を generating acyclic cofibration の集合, $\mathcal{W}$ を弱同値のクラスとするような cofibrantly generated なモデル圏になる.

Proof. 定理 1.1 の条件

(a) $\mathcal{W}$ は (2-out-of-3) をみたし，retract で閉じる
(b) I に属する射の domain は small with respect to $\mathrm{Cell}(I)$ である
(c) J に属する射の domain は small with respect to $\mathrm{Cell}(J)$ である
(d) $\mathrm{Cell}(J) \subseteq \mathrm{LLP}(\mathrm{RLP}(I)) \cap \mathcal{W}$
(e) $\mathrm{RLP}(I) = \mathrm{RLP}(J) \cap \mathcal{W}$

をみたすことを確認すればよい．(a) は命題 1.5 よりわかる．(d) は $\mathrm{Cell}(J) \subseteq \mathrm{LLP}(\mathrm{RLP}(J))$ であることと命題 1.8，命題 1.9 および系 1.19 より従う．(e) は命題 1.8 と命題 1.9 よりわかる．

(c) について，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(0, -) \cong 0$ は明らかに余極限を保つから，特に 0 は small with respect to $\mathrm{Cell}(J)$ である．また (b) について，命題 1.6 より $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(S_k^n, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(k)}(k, Z^n(-)) \cong Z^n(-)$ であり，有限極限とフィルター余極限が交換することから $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(k)}(S_k^n, -)$ はフィルター余極限を保つ．特に S_k^n は small with respect to $\mathrm{Cell}(I)$ となる． □

本小節での結果をまとめると，定理 1.4 のようになる．

2 おまけ：dg 圏の圏に入るモデル圏構造の紹介

k-加群の複体の圏 $\mathsf{Ch}(k)$ は，複体のテンソル積 $\otimes_k^\bullet$ と Hom 複体 $\mathrm{Hom}^\bullet$ によって**対称モノイダル閉圏** (*symmetric monoidal closed category*) になる．このとき Hom 対象が $\mathsf{Ch}(k)$ の対象であるような**豊穣圏** (*enriched category*) が定義できる．この $\mathsf{Ch}(k)$ 上の豊穣圏のことを **dg 圏** (*differential graded category*) という．詳しくは [Kel06] や [高橋 12] を見よ．

定義 2.1. 可換環 k 上の dg 圏 $\mathcal{A}$ とは,

- 対象のクラス $\mathrm{ob}(\mathcal{A})$
- 各対象 $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，複体 $\mathcal{A}(A, B) \in \mathsf{Ch}(k)$ が与えられている
- 各対象 $A, B, C \in \mathcal{A}$ に対して，複体の準同型 $M\colon \mathcal{A}(B, C) \otimes^\bullet \mathcal{A}(A, B) \to \mathcal{A}(A, C)$ が与えられている
- 各対象 $A \in \mathcal{A}$ に対して，元 $\mathrm{id}_A \in Z^0(\mathcal{A}(A, A))$ が与えられている

から成るデータの組であって，しかるべき結合性公理と単位性公理をみたすもののことをいう．

dg 圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の間の **dg 関手** (*dg functor*) $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ とは,

- 対象のクラスの間の対応 $F\colon \mathrm{ob}(\mathcal{A}) \to \mathrm{ob}(\mathcal{B})$
- 各対象 $A, A' \in \mathcal{A}$ に対して，複体の準同型 $F_{AA'}\colon \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(FA, FA')$ が与えられている

から成るデータの組であって，しかるべき条件をみたすもののことをいう．

dg 圏と dg 関手のなす圏を dgCat_k と表す．dg 圏に付随して二つの圏が得られる．

定義 2.2. dg 圏 $\mathcal{A}$ に対して，

(i) 圏 $Z^0(\mathcal{A})$ を次のような圏として定める：
  - $Z^0(\mathcal{A})$ の対象のクラスを $\mathrm{ob}(\mathcal{A})$ とする．
  - $Z^0(\mathcal{A})$ の対象 A, B に対して，$Z^0(\mathcal{A}(A, B))$ を Hom 集合とする．

  この構成は関手 $Z^0\colon \mathsf{dgCat}_k \to \mathsf{Cat}$ をなす．

(ii) 圏 $H^0(\mathcal{A})$ を次のような圏として定める：
  - $H^0(\mathcal{A})$ の対象のクラスを $\mathrm{ob}(\mathcal{A})$ とする．
  - $H^0(\mathcal{A})$ の対象 A, B に対して，$H^0(\mathcal{A}(A, B))$ を Hom 集合とする．

  この構成は関手 $H^0\colon \mathsf{dgCat}_k \to \mathsf{Cat}$ をなす．

加群の複体は擬同型なものを同一視したいと考えたのと同様に，dg 圏についても，豊穣圏としての圏同値よりも弱く，**擬同値**なものの違いを無視して扱うのが自然である．

定義 2.3. dg 圏の間の dg 関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ について，

(i) F が**擬忠実充満** (*quasi-fully faithful*) であるとは，各対象 $A, A' \in \mathcal{A}$ に対し複体の準同型 $F_{AA'}\colon \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(FA, FA')$ が擬同型であるときをいう．

(ii) F が**擬本質的全射** (*quasi-essentially surjective*) であるとは，関手 $H^0(F)\colon H^0(\mathcal{A}) \to H^0(\mathcal{B})$ が本質的全射，すなわち任意の対象 $B \in \mathcal{B}$ に対し $H^0(\mathcal{B})$ において B が FA と同型になるような対象 $A \in \mathcal{A}$ が存在するときをいう．

(iii) F が**擬同値** (*quasi-equivalence*) であるとは，擬忠実充満かつ擬本質的全射であるときをいう．

dg 関手 F が擬同値であるならば，誘導される関手 $H^0(F)$ は明らかに圏同値になる．dgCat_k での fibration は次のようなものを考える．

定義 2.4. dg 圏の間の dg 関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ について，F が *quasi-fibration* であるとは，次の二つの条件をみたすときをいう：

(a) (locally fibration) 各対象 $A, A' \in \mathcal{A}$ に対して，複体の準同型 $F_{AA'}\colon \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(FA, FA')$ が $\mathsf{Ch}(k)$ 上の射影的モデル構造に関する fibration，すなわち複体の全

射準同型である．

(b) (isofibration) 誘導される関手 $H^0(F)\colon H^0(\mathcal{A}) \to H^0(\mathcal{B})$ について，任意の対象 $A' \in H^0(\mathcal{A})$ と $H^0(\mathcal{B})$ の同型射 $v\colon B \to FA'$ に対し，$H^0(\mathcal{A})$ の同型射 $u\colon A \to A'$ であって $H^0(F)(u) = v$ となるものが存在する．

このとき次が成り立つ．

定理 2.5 (dgCat_k 上のモデル構造 [Tab05])**.** k 上の dg 圏の圏 dgCat_k には，

$$\mathcal{W} = \{\text{ 擬同値 }\}, \quad \mathrm{Fib} = \{\text{quasi-fibration}\}$$

であるようなモデル圏構造が存在する．さらにこのモデル圏は cofibrantly generated であり，すべての dg 圏は fibrant である．

証明は [Tab05] や [Bal13, Appendix B] を参照せよ．なお，一般に良いモノイダルモデル圏上の豊穣圏の圏には，同じような仕方でモデル圏構造が入ることも知られている．

参考文献

[Bal13] Pieter Belmans. *On the homotopy theory of differential graded categories.* Master mémoire, 2013. https://pbelmans.ncag.info/assets/memoire.pdf.

[Hir03] Philip S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations.* Mathematical Surveys and Monographs 99, American Mathematical Society, 2003. https://web.math.rochester.edu/people/faculty/doug/otherpapers/pshmain.pdf.

[Hov99] Mark Hovey. *Model categories.* Mathematical Surveys and Monographs 63, American Mathematical Society, 1999. https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/otherpapers/hovey-model-cats.pdf.

[Kel06] Bernhard Keller. *On differential graded categories.* In: International Congress of Mathematicians 2, 2006. https://arxiv.org/abs/math/0601185.

[Tab05] Gonçalo Tabuada. *Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories.* Comptes Rendus de l'Acadmie de Sciences de Paris 340, 15–19, 2005.

[高橋 12] 高橋篤史．「弦理論の代数的基礎 – 環・加群・圏から位相的弦理論、ミラー対称性へ」，臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 89，サイエンス社，2012.

[中岡 15] 中岡宏行．「圏論の技法 – アーベル圏と三角圏でのホモロジー代数」，日本評論社，2015.

[数学の犬] 数学の犬．『モデル圏』．https://sites.google.com/site/mathdogs1121/model_category.

[ぺ 21] paper3510mm．「モデル圏論の基礎」，ver. 2021 年 11 月 27 日．https://paper3510mm.github.io/pdf/modelcat.pdf.