Proarrow equipment のノート

@paper3510mm*

2024 年 11 月 30 日

概要

Proarrow equipment（副射装備）は形式圏論を展開するための枠組みの一つである．ここで形式圏論とは，通常の圏論を形式化・統合化することを目指す 2-圏論の一分野である．2-圏に対してその上の proarrow equipment の構造が与えられると，随伴・同値に加えて（余）極限，Cauchy 完備性，各点 Kan 拡張などといった通常の圏論における様々な概念やそれらの相互作用を抽象的に議論できるようになる．本ノートでは，Wood [Woo82] により導入された proarrow equipment の理論を解説する．

目次

0 はじめに 2

1 Proarrow equipment の基礎 3

1.1 2-圏と双圏 3
1.2 Proarrow equipment 7
1.3 Proarrow equipment における重み付き極限 9
1.4 絶対極限と Cauchy 完備性 12
1.5 相対随伴と各点 Kan 拡張 14

* https://paper3510mm.github.io/notes.

0 はじめに

環上の加群に関する議論がアーベル圏での抽象ホモロジー代数として形式化されたように，圏の理論を形式化することはできないだろうか．例えば，加群のなす圏が持つ性質を抽象化することでアーベル圏が導入されたのと同じように，圏のなす 2-圏が備えている性質や構造を抽出することで，圏論を形式的に展開する枠組みを定義できないだろうか．このような，通常の圏論での諸理論を 2-圏論的に抽象化しようとする試みを**形式圏論** (*formal category theory*) と呼ぶ[*1]．

より具体的に言えば，圏のなす 2-圏 Cat において成り立つ定理を synthetic な視点から捉え直し，そうした定理を一般の 2-圏 $\mathcal{K}$ において公理的に展開しようとする分野が形式圏論である．圏の名を冠する概念にもさまざまなものが存在しており，通常の圏に加えて

- 豊穣圏 (enriched category): Hom に集合以上の構造が載っている圏
- 内部圏 (internal category): 有限完備な圏における圏対象
- ファイバー圏 (fibered category): 圏のファイブレーション
- 添圏 (indexed category): 圏の族
- モノイダル圏 (monoidal category) をはじめとする代数構造を持った圏
- 無限圏 (∞-category): 2 以上の高次の射を備えた圏

などがある．多くの場合，そのそれぞれが通常の圏と同じように 2-圏をなし，極限や随伴の定義が可能で，本質的に同じ定理が証明できる．そうした現象を統一的に扱おうとすることが形式圏論の目的である．

副射装備 (*proarrow equipment*) は，形式圏論を行うための枠組みの一つで Wood [Woo82; Woo85] により導入された．双圏 (bicategory) の間の pseudo-functor $(-)_*\colon \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ が proarrow equipment であるとは，三条件

(1) $(-)_*$ は対象上全単射である
(2) $(-)_*$ は局所充満忠実である
(3) 任意の $\mathcal{K}$ の射 f に対して，$\mathcal{M}$ の射 f_* は $\mathcal{M}$ において右随伴を持つ

をみたすときをいう．例えば，圏のなす 2-圏 Cat からプロ関手のなす双圏 Prof への pseudo-functor $(-)_*\colon \mathsf{Cat} \to \mathsf{Prof}$ は proarrow equipment の典型例である．2-圏や双圏において通常定義できる随伴・同値に加え，proarrow equipment の構造を用いることで（余）極限や各点 Kan 拡張などが定義できるようになり，通常の圏論と同じような圏論が展開できる（proarrow equipment $(-)_*\colon \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ が提供するのは，双圏 $\mathcal{K}$ における圏論である）．

本ノートでは，[Woo82] による proarrow equipment の理論を解説する．

[*1] Gray [Gra74, Introduction] によれば，形式圏論という語は Mac Lane が名付けたらしい．

1 Proarrow equipment の基礎

1.1 2-圏と双圏

双圏 (*bicategory*) とは，弱 2-圏のことである．つまり双圏は，結合律と単位律が同型の除いてしか成り立たないような 2-圏である．詳しくは [Bén67] や [JY21] を見よ．以下では簡単のため結合律や単位律を表す同型は省略して書くことにする．

双圏 $\mathcal{K}$ に対して，Hom 圏 $\mathcal{K}(A,B)$ の対象を $\mathcal{K}$ の **1-射** (1-*morphism*) もしくは単に**射** (*morphism*) といい，$\mathcal{K}(A,B)$ の射を $\mathcal{K}$ の **2-射** (2-*morphism*) もしくは **2-セル** (2-*cell*) と呼ぶ．双圏 $\mathcal{K}$ の射の向きを逆にして得られる双圏を $\mathcal{K}^{\mathrm{op}}$，2-セルの向きを逆にして得られる双圏 $\mathcal{K}^{\mathrm{co}}$ と表し，$\mathcal{K}^{\mathrm{coop}} = (\mathcal{K}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{co}} = (\mathcal{K}^{\mathrm{co}})^{\mathrm{op}}$ と置く．$\mathcal{K}^{\mathrm{coop}}$ は $\mathcal{K}$ の 1-射と 2-射の両方の向きを逆にした双圏である．

2-圏のときと同じように，双圏においても同値と随伴を定義できる．

定義 1.1. $\mathcal{K}$ を双圏とする．

(1) $\mathcal{K}$ における**同値** (*equivalence*) とは，射 $f\colon A \to B$ と $u\colon B \to A$ の組であって，$u \circ f \cong \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ u \cong \mathrm{id}_B$ となるものをいう．

(2) $\mathcal{K}$ における**随伴** (*adjunction*) とは，射 $f\colon A \to B$，$u\colon B \to A$ と 2-セル $\eta\colon \mathrm{id}_A \Rightarrow u \circ f$，$\varepsilon\colon f \circ u \Rightarrow \mathrm{id}_B$ の四つ組であって，三角等式

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\eta\Uparrow"] & B \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} = \mathrm{id}_f, \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[r, phantom, "\varepsilon\Uparrow", shift right=4] & B \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\eta\Uparrow"] & \\ & A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_A"'] & A \end{tikzcd} = \mathrm{id}_u$$

をみたすものをいう．このとき f を**左随伴** (*left adjoint*)，u を**右随伴** (*right adjoint*)，η を**単位** (*unit*)，ε を**余単位** (*counit*) と呼ぶ．

例 1.2. (1) 圏のなす 2-圏 Cat における同値はちょうど通常の圏同値のことであり，Cat における随伴はちょうど通常の随伴のことである．

(2) コスモス $\mathcal{V}$[*2]上の豊穣圏のなす 2-圏 $\mathcal{V}$-Cat における随伴は，$\mathcal{V}$-関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ と $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ の組であって自然な同型 $\mathcal{B}(FA, B) \cong \mathcal{A}(A, GB)$ が存在するものと等価である．

双圏における Kan 拡張と Kan リフトを導入しよう．

[*2] **コスモス** ((*Bénabou*) *cosmos*) とは，完備かつ余完備な対称モノイダル閉圏のことを指す．

定義 1.3. $\mathcal{K}$ を双圏とする．

(1) $f\colon A \to B$ と $k\colon A \to D$ を $\mathcal{K}$ の射とする．f の k に沿った**左 Kan 拡張** (*left Kan extension*) とは，射 $\mathrm{Lan}_k f\colon D \to B$ と 2-セル $\theta\colon f \Rightarrow \mathrm{Lan}_k f \circ k$ の組であって，任意の $h\colon D \to B$ に対し

$$\mathcal{K}(D,B)(\mathrm{Lan}_k f, h) \to \mathcal{K}(A,B)(f, h \circ k), \quad \chi \mapsto (\chi k) \circ \theta$$

が全単射となるもののことをいう．また $\mathcal{K}^{\mathrm{co}}$，$\mathcal{K}^{\mathrm{op}}$，$\mathcal{K}^{\mathrm{coop}}$ における左 Kan 拡張をそれぞれ**右 Kan 拡張** (*right Kan extension*)，**左 Kan リフト** (*left Kan lifting*)，**右 Kan リフト** (*right Kan lifting*) と呼び，記号 Ran，Lift，Rift を用いて表す．

(2) $g\colon B \to C$ を $\mathcal{K}$ の別な射とする．このとき g が左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_k f$（あるいは右 Kan 拡張 $\mathrm{Ran}_k f$）を**保存する** (*preserve*) とは，$g \circ \mathrm{Lan}_k f \cong \mathrm{Lan}_k(g \circ f)$（もしくは $g \circ \mathrm{Ran}_k f \cong \mathrm{Ran}_k(g \circ f)$）が成り立つときをいう．

(3) 射 g が左 Kan リフト $\mathrm{Lift}_k f$（もしくは右 Kan リフト $\mathrm{Rift}_k f$）を**交換する** (*respect*) とは，$(\mathrm{Lift}_k f) \circ g \cong \mathrm{Lift}_k(f \circ g)$（もしくは $(\mathrm{Rift}_k f) \circ g \cong \mathrm{Rift}_k(f \circ g)$）が成り立つときをいう．

(4) 左 Kan 拡張が**絶対** (*absolute*) であるとは，すべての射によって保たれるときをいう．同様に絶対右 Kan 拡張や絶対 Kan リフトも定義する．

命題 1.4. 双圏 $\mathcal{K}$ の射 $f\colon A \to B$，$k\colon A \to D$，$l\colon D \to E$ に対して，左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_k f$ が存在するとき，次の両辺のいずれかが存在すればもう一方も存在して同型

$$\mathrm{Lan}_l \mathrm{Lan}_k f \cong \mathrm{Lan}_{lk} f$$

が成り立つ．

命題 1.5. 双圏 $\mathcal{K}$ の射 $f\colon A \to B$，$g\colon B \to A$ を考える．

(1) 2-セル $\eta\colon \mathrm{id}_A \Rightarrow g \circ f$ に対して，次は同値：
   (i) η は随伴 $f \dashv g$ の unit になる．
   (ii) 組 (f, η) は絶対左 Kan リフト $\mathrm{Lift}_g \mathrm{id}_A$ をなす．
   (iii) 組 (f, η) は左 Kan リフト $\mathrm{Lift}_g \mathrm{id}_A$ で，g がこの Kan リフトと交換する．
   (iv) 組 (g, η) は絶対左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_f \mathrm{id}_A$ をなす．
   (v) 組 (g, η) は左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_f \mathrm{id}_A$ で，f がこの Kan 拡張を保存する．

(2) 2-セル $\varepsilon\colon f \circ g \Rightarrow \mathrm{id}_B$ に対して，次は同値：
   (i) ε は随伴 $f \dashv g$ の counit になる．
   (ii) 組 (g, ε) は絶対右 Kan リフト $\mathrm{Rift}_f \mathrm{id}_B$ をなす．
   (iii) 組 (g, ε) は右 Kan リフト $\mathrm{Rift}_f \mathrm{id}_B$ で，f がこの Kan リフトと交換する．
   (iv) 組 (f, ε) は絶対右 Kan 拡張 $\mathrm{Ran}_g \mathrm{id}_B$ をなす．

(v) 組 (f, ε) は右 Kan 拡張 $\mathrm{Ran}_g \mathrm{id}_B$ で，g がこの Kan 拡張を保存する．

命題 1.6. $\mathcal{K}$ を双圏とする．

(1) 左随伴に沿った右 Kan リフトは，右随伴との post-composition である：すなわち，射 $h\colon A \to C$ と $f\colon B \to C$ に対して f が右随伴 g を持つとき，

$$\mathrm{Rift}_f\, h \cong g \circ h$$

が成り立つ．特にこれは絶対右 Kan リフトである．

(2) 右随伴に沿った右 Kan 拡張は，左随伴との pre-composition である：すなわち，射 $f\colon A \to B$ と $h\colon A \to C$ に対して f が左随伴 g を持つとき，

$$\mathrm{Ran}_f\, h \cong h \circ g$$

が成り立つ．特にこれは絶対右 Kan 拡張である．

Proof. 命題 1.5 よりわかる．□

命題 1.7. 双圏 $\mathcal{K}$ において，左随伴はすべての左 Kan 拡張を保存し，すべての右 Kan リフトと交換する．双対的に，右随伴はすべての右 Kan 拡張を保存し，すべての左 Kan リフトと交換する．

Proof. 図式追跡によりわかる．□

定義 1.8. 双圏 $\mathcal{M}$ が *closed* であるとは，pre-composition functor と post-composition functor がともに右随伴を持つときをいう．すなわち，$\mathcal{M}$ の射 $X\colon A \to B$，$Y\colon B \to C$，$Z\colon A \to C$ に対して自然な全単射

$$\mathcal{M}(A,C)(Y \circ X, Z) \cong \mathcal{M}(A,B)(X, Y_{\ddagger}Z),$$
$$\mathcal{M}(A,C)(Y \circ X, Z) \cong \mathcal{M}(B,C)(Y, X^{\ddagger}Z)$$

が存在するときをいう．

命題 1.9. 双圏 $\mathcal{M}$ の射 $X\colon A \to B$，$Y\colon B \to C$，$Z\colon A \to C$ について，$Y \circ -, - \circ X$ が右随伴 $Y_{\ddagger}(-), X^{\ddagger}(-)$ を持つとする．このとき随伴の counit

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "Y"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow"] \\ A \arrow[ur, bend left, "Y_{\ddagger}Z"] \arrow[r, "Z"'] & C, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[dr, bend left, "X^{\ddagger}Z"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & \\ A \arrow[u, "X"] \arrow[r, "Z"'] & C \end{tikzcd}$$

はそれぞれ $\mathcal{M}$ における右 Kan リフト，右 Kan 拡張である．さらに $\mathcal{M}$ が closed であること

は，$\mathcal{M}$ においてすべての右 Kan リフトと右 Kan 拡張が存在することと同値である．

Proof. 定義からわかる． □

例 1.10 (The closed bicategory of profunctors)**.** 小圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して，**プロ関手** (*profunctor*) $X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ とは関手 $X\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$ のことを指す．プロ関手 $X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$，$Y\colon \mathcal{B} \nrightarrow \mathcal{C}$ に対して，その "合成" $Y \odot X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{C}$ をコエンド

$$(Y \odot X)(c, a) = \int^{b \in \mathcal{B}} Y(c, b) \times X(b, a)$$

によって定義する．この合成によって，小圏とその間のプロ関手は双圏 Prof をなす．Hom 関手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,-)\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$ をプロ関手 $I_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{A}$ とみなしたものが Prof における $\mathcal{A}$ の恒等射となる．

さらに双圏 Prof は closed になる：$X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$，$Y\colon \mathcal{B} \nrightarrow \mathcal{C}$，$Z\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{C}$ をプロ関手とする．プロ関手 $X^{\ddagger}Z\colon \mathcal{B} \nrightarrow \mathcal{C}$ を

$$X^{\ddagger}Z(C, B) = \mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathsf{Set})(X(B, -), Z(C, -)) = \int_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{Hom}\big(X(B, A), Z(C, A)\big)$$

によって定義し，プロ関手 $Y_{\ddagger}Z\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$

$$Y_{\ddagger}Z(B, A) = \mathsf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})(Y(-, B), Z(-, A)) = \int_{C \in \mathcal{C}} \mathrm{Hom}\big(Y(C, B), Z(C, A)\big)$$

によって定義する．このとき自然な全単射

$$\begin{aligned} \mathsf{Prof}(\mathcal{A}, \mathcal{C})(Y \odot X, Z) &\cong \mathsf{Prof}(\mathcal{B}, \mathcal{C})(Y, X^{\ddagger}Z), \\ \mathsf{Prof}(\mathcal{A}, \mathcal{C})(Y \odot X, Z) &\cong \mathsf{Prof}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(X, Y_{\ddagger}Z) \end{aligned}$$

が存在する．

命題 1.11. $\mathcal{M}$ を closed な双圏とする．このとき射 $X\colon A \to B$ に対して

$$\begin{aligned} X \text{ は左随伴である} &\iff X \text{ はすべての右 Kan リフトと交換する}, \\ X \text{ は右随伴である} &\iff X \text{ はすべての右 Kan 拡張と交換する}. \end{aligned}$$

Proof. 一つ目だけ示す．($\Rightarrow$) は命題 1.7 より成り立つ．($\Leftarrow$) も，$\mathcal{M}$ が closed であることと命題 1.5 よりわかる． □

双圏の間の射の概念を紹介する．

定義 1.12. 双圏 $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ の間の *lax functor* $\Phi\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ とは，

- 対象の間の対応 $\Phi\colon \mathrm{ob}(\mathcal{K}) \to \mathrm{ob}(\mathcal{L})$

- 対象 $A, B \in \mathcal{K}$ に対して，関手 $\Phi = \Phi_{AB} \colon \mathcal{K}(A,B) \to \mathcal{L}(\Phi(A), \Phi(B))$
- 対象 $A \in \mathcal{K}$ に対して，2-セル $\epsilon^A \colon \mathrm{id}_{\Phi(A)} \Rightarrow \Phi(\mathrm{id}_A)$
- 対象 $A, B, C \in \mathcal{K}$ に対して，$f \in \mathcal{K}(A,B)$ と $g \in \mathcal{K}(B,C)$ について自然な 2-セル $\mu^{A,B,C}_{g,f} \colon \Phi(g) \circ \Phi(f) \Rightarrow \Phi(g \circ f)$

の組であって，結合律と単位律をみたすもののことをいう（詳細は [JY21, Definition 4.1.2] をみよ）．このとき ϵ^A を *lax unity constraint*，$\mu^{A,B,C}_{g,f}$ を *lax functoriality constraint* と呼ぶ．

双圏の間の lax functor $\Phi \colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ について，すべての ϵ^A が同型であるとき Φ は *normal* であるといい，すべての ϵ^A と $\mu^{A,B,C}_{g,f}$ が同型であるとき Φ は *pseudo-functor* であるという．

明らかに pseudo-functor は同値と随伴を保つが，lax functor に対しては成り立つとは限らない．

1.2 Proarrow equipment

$\mathcal{K}, \mathcal{M}$ を双圏とする．

定義 1.13 ([Woo82], [Woo85])**.** pseudo-functor $(-)_* \colon \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ が**副射装備** (*proarrow equipment*) であるとは，三条件

(1) $(-)_*$ は対象上全単射である
(2) $(-)_*$ は局所充満忠実である
(3) 任意の $\mathcal{K}$ の射 f に対して，f_* は $\mathcal{M}$ において右随伴 f^* を持つ

をみたすときをいう．

proarrow equipment $(-)_*$ は対象上全単射であるから，以降 $\mathcal{K}$ と $\mathcal{M}$ の対象を同一視して $\mathrm{ob}(\mathcal{K}) = \mathrm{ob}(\mathcal{M})$ とする．

proarrow equipment $(-)_* \colon \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ があるとき，$\mathcal{K}$ の射 $f \colon A \to B$ に対して $\mathcal{M}$ における随伴 $f_* \dashv f^*$ が存在する．この随伴の unit を $\overline{f} \colon \mathrm{id}_A \Rightarrow f^* \circ f_*$ と表す．随伴の unit は絶対左 Kan 拡張であることから，$\mathcal{K}$ の 2-セル $\tau \colon f \Rightarrow g \colon A \to B$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d, "f^*"] \\
A \arrow[ur, "f_*"'] \arrow[ur, bend left=60, "g_*"] \arrow[ur, phantom, bend left=30, "\Uparrow\tau_*"] \arrow[r, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Uparrow\overline{f}"] & A
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "g^*"'] \arrow[dr, bend left=60, "f^*"] \arrow[dr, phantom, bend left=30, "\tau^*"] & \\
A \arrow[u, "g_*"] \arrow[r, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\overline{g}\Uparrow"] & A
\end{tikzcd}
$$

をみたす $\mathcal{M}$ の 2-セル $\tau^* \colon g^* \Rightarrow f^* \colon B \to A$ が一意に得られる．この対応により pseudo-functor

$$(-)^* \colon \mathcal{K}^{\mathrm{coop}} \to \mathcal{M}$$

が定まる．$(-)_*$ が局所充満忠実であることから $(-)^*$ も局所充満忠実であることがわかる．

$\mathcal{M}$ の射 X が $\mathcal{K}$ の射 f によって $X \cong f_*$ と表せるとき X は *representable* であるといい，$X \cong f^*$ と表せるとき *corepresentable* であるという．

例 1.14. (1) プロ関手のなす双圏 Prof を考える（例 1.10 を見よ）．関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対してプロ関手 $F_*\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ を

$$F_* = \mathcal{B}(-, F(-))\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$$

によって定める．このとき F_* は Prof において $F^* = \mathcal{B}(F(-), -)\colon \mathcal{B} \nrightarrow \mathcal{A}$ を右随伴に持つことがわかる ([Bor94, Proposition 7.9.1], [Lor21, Remark 5.2.1])．したがって pseudo-functor

$$(-)_*\colon \mathsf{Cat} \to \mathsf{Prof}, \quad F \mapsto F_*$$

は proarrow equipment である．

(2) より一般に $\mathcal{V}$ をコスモスとするとき，$\mathcal{V}$-豊穣小圏の間の豊穣プロ関手 $X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ を，$\mathcal{V}$-関手

$$X\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{V}$$

によって定義する．このとき $\mathcal{V} = \mathsf{Set}$ のときと同様に，pseudo-functor

$$(-)_*\colon \mathcal{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathcal{V}\text{-}\mathsf{Prof}, \quad F \mapsto \mathcal{B}(-, F(-))$$

は proarrow equipment になる．

例 1.15 (その他の例)**.** (1) $\mathcal{C}$ を pullback を持つ圏とし，$\mathcal{C}$ におけるスパンのなす双圏を $\mathsf{Span}(\mathcal{C})$ で表す．このとき対応 $(f\colon c \to d) \mapsto (c \xleftarrow{\mathrm{id}_c} c \xrightarrow{f} d)$ は proarrow equipment

$$(-)_*\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Span}(\mathcal{C})$$

をなす．

(2) $\mathcal{S}$ を有限完備な圏とするとき，$\mathcal{S}$-内部圏のなす proarrow equipment

$$(-)_*\colon \mathsf{Cat}(\mathcal{S}) \to \mathsf{Prof}(\mathcal{S})$$

が存在する．

(3) 初等トポスとその間の幾何学的射のなす 2-圏を Top とする（射の方向は右随伴の方向と同じ）．また初等トポスと左完全関手のなす 2-圏を TopLex とする．このとき幾何学的射の左随伴を取り出す対応によって proarrow equipment

$$(-)_*\colon \mathsf{TopGeom}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{TopLex}^{\mathrm{co}}$$

が得られる．

(4) 同様に，アーベル圏とその間の幾何学的射のなす 2-圏を Abel，アーベル圏とその間の左完全関手のなす 2-圏を $\mathsf{AbelLex}$ とするとき，幾何学的射の左随伴を取り出す対応によって proarrow equipment

$$(-)_*\colon \mathsf{AbelGeom}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{AbelLex}^{\mathrm{co}}$$

が得られる．

命題 1.16 (米田 [Woo82, Proposition 3]). $(-)_*\colon \mathcal{K}\to\mathcal{M}$ を proarrow equipment とする.

(1) $\mathcal{K}$ の射 $f\colon B\to C$ と $\mathcal{M}$ の射 $Z\colon A\to C$ に対して, $\mathrm{Rift}_{f_*} Z\cong f^*\circ Z$ が成り立つ.
(2) $\mathcal{K}$ の射 $f\colon B\to A$ と $\mathcal{M}$ の射 $Z\colon A\to C$ に対して, $\mathrm{Ran}_{f^*} Z\cong Z\circ f_*$ が成り立つ.

Proof. 命題 1.6 よりわかる. □

系 1.17. $(-)_*\colon \mathcal{K}\to\mathcal{M}$ を proarrow equipment とする. $\mathcal{K}$ の射 $f\colon B\to C, g\colon A\to C$ に対して,

$$\mathrm{Rift}_{f_*} g_*\cong f^*\circ g_*\cong \mathrm{Ran}_{g^*} f^*$$

が成り立つ.

Proof. 命題 1.6 よりわかる. □

1.3 Proarrow equipment における重み付き極限

以下, $(-)_*\colon \mathcal{K}\to\mathcal{M}$ を proarrow equipment とする.

定義 1.18 ([Woo82, §2]). $\mathcal{K}$ の射 $f\colon J\to A$ と $\mathcal{M}$ の射 $W\colon M\to J$ に対して, f の W**-重み付き余極限** (W*-weighted colimit*) とは, $\mathcal{K}$ の射 $\mathrm{colim}^W f=W\star f\colon M\to A$ と $\mathcal{M}$ における右 Kan リフト

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "W"] \\ A \arrow[ur, bend left, "(W\star f)^*"] \arrow[r, "f^*"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\iota"] & J \end{tikzcd}$$

の組のことをいう. f の W-重み付き余極限が存在すれば, $(W\star f)^*=\mathrm{Rift}_W f^*$ である. 言い換えれば余極限 $W\star f$ が存在するのは, 右 Kan リフト $\mathrm{Rift}_W f^*$ が存在してこれが corepresentable なときである.

双対的に, $\mathcal{K}$ の射 $f\colon J\to A$ と $\mathcal{M}$ の射 $W\colon J\to M$ に対して, f の W**-重み付き極限** (W*-weighted limit*) とは, $\mathcal{K}$ の射 $\lim^W f=\{W,f\}\colon M\to A$ と $\mathcal{M}$ における右 Kan 拡張

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, bend left, "\{W,f\}_*"] & \\ J \arrow[u, "W"] \arrow[r, "f_*"'] \arrow[ur, phantom, "\pi\Downarrow"] & A \end{tikzcd}$$

の組のことをいう. f の W-重み付き極限が存在すれば, $\{W,f\}_*=\mathrm{Ran}_W f_*$ である. 言い換えれば極限 $\{W,f\}$ が存在するのは, 右 Kan 拡張 $\mathrm{Ran}_W f_*$ が存在してこれが representable なときである.

例 1.19. 例 1.14 のように，豊穣圏のなす proarrow equipment $\mathcal{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathcal{V}\text{-}\mathsf{Prof}$ を考える．$M = \mathcal{I}$ を単位 $\mathcal{V}$-豊穣圏とする．

$\mathcal{V}$-関手 $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ と $\mathcal{V}$-プロ関手 $W\colon \mathcal{I} \nrightarrow \mathcal{J}$ に対して，$\mathcal{V}\text{-}\mathsf{Prof}$ における右 Kan リフト $\mathrm{Rift}_W F^*\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{I}$ は

$$\mathrm{Rift}_W F^*(*, A) = \mathsf{Fun}(\mathcal{J}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V})(W(-,*), \mathcal{A}(F-, A))$$

で与えられる．このことから定義 1.18 の意味での F の W-重み付き余極限とは，ちょうど [Kel82, §3.1] の意味で前層 $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \cong \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{I} \to \mathcal{V}$ を重みとする F の余極限に等しい．

命題 1.20 ([Woo82, Proposition 6])**.** $\mathcal{K}$ の射 $f\colon J \to A$ と $\mathcal{M}$ の射 $V\colon N \to M, W\colon M \to A$ に対して，W-重み付き余極限 $W \star f$ が存在するとき，次の両辺のいずれかが存在すればもう一方も存在して

$$V \star (W \star f) \cong (W \circ V) \star f$$

が成り立つ．

双対的に，適切な U, W, f に対して，次の両辺のいずれかが存在すればもう一方も存在して

$$\{U, \{W, f\}\} \cong \{U \circ W, f\}$$

が成り立つ．

Proof. 前半だけ示す．命題 1.4 の双対により一般に $\mathrm{Rift}_V(\mathrm{Rift}_W f^*) \cong \mathrm{Rift}_{W \circ V} f^*$ が成り立つから，

$$(V \star (W \star f))^* \cong \mathrm{Rift}_V(W \star f)^* \cong \mathrm{Rift}_V(\mathrm{Rift}_W f^*) \cong \mathrm{Rift}_{W \circ V} f^* \cong ((W \circ V) \star f)^*$$

となる．$(-)^*$ は locally fully faithful だから

$$V \star (W \star f) \cong (W \circ V) \star f$$

を得る． □

命題 1.21 ([Woo82, Proposition 7])**.** $\mathcal{K}$ の射 $f\colon J \to A, w\colon M \to J$ に対して，

$$w_* \star f \cong f \circ w \cong \{w^*, f\}$$

が成り立つ．

Proof. 命題 1.16 より

$$(f \circ w)^* \cong w^* \circ f^* \cong \mathrm{Rift}_{w_*} f^* = (w_* \star f)^*$$

となるから $w_* \star f \cong f \circ w$ が成り立つ．もう一方も同様． □

定義 1.22. $\mathcal{K}$ の射 $g\colon A \to B$ が重み付き余極限 $W \star f$ を保つとは，g^* が右 Kan リフト $(W \star f)^* = \mathrm{Rift}_W f^*$ と交換するときをいう．

同様に，$g\colon A \to B$ が重み付き極限 $\{W, f\}$ を保つとは，g_* が右 Kan 拡張 $\{W, f\}_* = \mathrm{Ran}_W f_*$ を保存するときをいう．

命題 1.23 ([Woo82, Proposition 8])**.** 左随伴はすべての重み付き余極限を保つ．双対的に，右随伴はすべての重み付き極限を保つ．

Proof. $\mathcal{K}$ の射 f が右随伴 u を持つとき，$\mathcal{M}$ における随伴 $f^* \dashv u^*$ があるから，命題 1.7 より f^* は右 Kan リフトと交換する．よって f はすべての重み付き余極限を保つ． □

命題 1.24 (Formal criterion for representability [Woo82, Proposition 9])**.** $\mathcal{K}$ の射 $f\colon A \to B$ と $\mathcal{M}$ の射 $X\colon A \to B$ に対して，次は同値である．

(i) $X \cong f_*$.

(ii) 重み付き余極限 $X \star \mathrm{id}_B$ が存在して，$X \star \mathrm{id}_B \cong f$ かつ X はすべての右 Kan リフトと交換する．

(iii) 重み付き余極限 $X \star \mathrm{id}_B$ が存在して，$X \star \mathrm{id}_B \cong f$ かつ X は右 Kan リフト $(X \star \mathrm{id}_B)^* = \mathrm{Rift}_X \mathrm{id}_B^*$ と交換する．

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii)：命題 1.21 より，

$$X \star \mathrm{id}_B \cong f_* \star \mathrm{id}_B \cong \mathrm{id}_B \circ f \cong f$$

となる．また $X \cong f_*$ は右随伴を持つから，すべての右 Kan リフトと交換する．

(ii) $\Rightarrow$ (iii)：明らか．

(iii) $\Rightarrow$ (i)：$X \star \mathrm{id}_B \cong f$ より

$$f^* \cong (X \star \mathrm{id}_B)^* \cong \mathrm{Rift}_X \mathrm{id}_B^* \cong \mathrm{Rift}_X \mathrm{id}_B$$

である．X がこれと交換するから，命題 1.5 より随伴 $X \dashv f^*$ が成り立つ．$f_* \dashv f^*$ でもあるから $X \cong f_*$ となる． □

$\mathcal{K}$ の射 $f\colon A \to B$ と $u\colon B \to A$ に対して，

$$\mathcal{K} \text{ において随伴 } f \dashv u \text{ が成り立つ} \iff \mathcal{M} \text{ において } f^* \cong u_* \text{ が成り立つ}$$

であることに注意する．

系 1.25 (Formal adjoint arrow theorem [Woo82, Corollary 10])**.** $\mathcal{K}$ の射 $f\colon A \to B, u\colon B \to A$ に対して，次は同値である．

(i) $f \dashv u$.

(ii) 重み付き余極限 $f^* \star \mathrm{id}_B$ が存在して，$f^* \star \mathrm{id}_B \cong u$ かつ f はすべての重み付き余極限を保つ．

(iii) 重み付き余極限 $f^* \star \mathrm{id}_B$ が存在して，$f^* \star \mathrm{id}_B \cong u$ かつ f は重み付き余極限 $f^* \star \mathrm{id}_B$ を保つ．

Proof. 命題 1.24 で $X = f^*$ とすればよい． □

定義 1.26. $\mathcal{K}$ の射 $f\colon A \to B$ が**充満忠実** (*fully faithful*) であるとは，$\mathcal{M}$ における随伴 $f_* \dashv f^*$ の unit が同型であるときをいう．

例 1.27. コスモス $\mathcal{V}$ 上の豊穣圏のなす proarrow equipment $\mathcal{V}$-Cat $\to$ $\mathcal{V}$-Prof において，$\mathcal{V}$-関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が定義 1.26 の意味で充満忠実であることは，豊穣関手として充満忠実である，すなわちすべての $A, A' \in \mathcal{A}$ について $F_{AA'}\colon \mathcal{A}(A, A) \to \mathcal{B}(FA, FA')$ が同型射であることと同値である．

命題 1.28 ([Woo82, Proposition 13])**.** $\mathcal{K}$ の左随伴 $f\colon A \to B$ について η をその unit とするとき，次は同値：

(i) f は充満忠実である．

(ii) η は同型である．

Proof. f が右随伴を持ち，η がその随伴の unit であるとき，η_* は随伴 $f_* \dashv f^*$ の unit になる．よって主張は $(-)_*$ が局所充満忠実であることから従う． □

1.4 絶対極限と Cauchy 完備性

$(-)_*\colon \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ を proarrow equipment とする．

定義 1.29. $\mathcal{K}$ の射 $f\colon J \to A$ と $\mathcal{M}$ の射 $W\colon M \to J$ に対して，f の W-重み付き余極限 $W \star f\colon M \to A$ が**絶対的** (*absolute*) であるとは，任意の $\mathcal{K}$ の射 $g\colon A \to B$ がこれを保つときをいう．

同様に，f の W-重み付き極限 $\{W, f\}\colon M \to A$ が**絶対的** (*absolute*) であるとは，任意の $\mathcal{K}$ の射 $g\colon A \to B$ がこれを保つときをいう．

命題 1.30. $W\colon M \to J$ を $\mathcal{M}$ の射とする．W が右随伴 $V\colon J \to M$ を持つとき，すべての W-重み付き余極限は絶対的である．

同様に $W\colon J \to M$ が左随伴 $U\colon M \to J$ を持つとき，すべての W-重み付き極限は絶対的である．

Proof. $\mathcal{K}$ の射 $f\colon J \to A$ について W-重み付き余極限 $W \star f\colon M \to A$ が存在するとすると，$(W \star f)^* = \mathrm{Rift}_W f^*$ である．ここで W は左随伴だから命題 1.6 より $\mathrm{Rift}_W f^* \cong V \circ f^*$ となる．よって任意の $\mathcal{K}$ の射 $g\colon A \to B$ に対して

$$(W \star f)^* \circ g^* \cong V \circ f^* \circ g^* \cong V \circ (gf^*) \cong \mathrm{Rift}_W (gf)^*$$

となり g^* は右 Kan リフト $\mathrm{Rift}_W f^*$ と交換するから，g は余極限 $W \star f$ を保つ．重み付き極限のほうも同様である． □

命題 1.31 (A generalization of [Gar14])**.** $W\colon M \to J$ を $\mathcal{M}$ の射とし, W は右随伴 $V\colon J \to M$ を持つとする．$\mathcal{K}$ の射 $f\colon J \to A$ と $z\colon M \to A$ について，次は同値：

(i) z が f の（絶対）W-重み付き余極限である．

(ii) z が f の（絶対）V-重み付き極限である．

Proof. W と V は随伴 $W \dashv V$ をなすから，命題 1.6 より

$$\mathrm{Rift}_W f^* \cong V \circ f^*, \qquad \mathrm{Ran}_V f_* \cong f_* \circ W$$

となる．特に随伴 $\mathrm{Ran}_V f_* \dashv \mathrm{Rift}_W f^*$ が成り立つ．したがって $\mathrm{Rift}_W f^*$ が z によって corepresentable であることと $\mathrm{Ran}_V f_*$ が z によって representable であることは同値であることから従う． □

定義 1.32. 対象 $A \in \mathcal{K}$ が **Cauchy 完備** (*Cauchy complete*) であるとは，任意の $\mathcal{M}$ の左随伴 $\Phi\colon D \to A$ が representable となるときをいう．

命題 1.33. 対象 $A \in \mathcal{K}$ について，次は同値である．

(i) A は Cauchy 完備である．

(ii) A はすべての左随伴を重みとする余極限を持つ．

(iii) A はすべての右随伴を重みとする極限を持つ．

Proof. (i) ⇒ (ii): $W\colon D \to J$ を $\mathcal{M}$ の左随伴とし，$V\colon J \to D$ をその右随伴とする．任意の $\mathcal{K}$ の射 $f\colon J \to A$ に対して，命題 1.31 より，$\mathrm{colim}^W f$ が存在することは $\lim^V f$ が存在することと同値であり，これは成り立つのは $\mathrm{Ran}_V f_* \cong f_* \circ W$ が representable のときである．$f_* \circ W$ は $\mathcal{M}$ の左随伴だから，A が Cauchy 完備であることよりこれは representable となる．

(ii) ⇒ (i): $W\colon D \to A$ を $\mathcal{M}$ の左随伴とし，$V\colon A \to D$ をその右随伴とする．このとき A は W-重み付き余極限を持つから，特に $g \coloneqq \mathrm{colim}^W \mathrm{id}_A$ が存在する．このとき g^* は右 Kan リフト $\mathrm{Rift}_W \mathrm{id}_A^*$ である．いま $W \dashv V$ だから $V \cong g^*$ であり，したがって $g_* \cong W$ となる．

(ii) ⇔ (iii): これは命題 1.31 より従う． □

よって命題 1.30 より，すべての絶対（余）極限を持つならば Cauchy 完備である．

注意 1.34. 豊穣圏と豊穣プロ関手のなす proarrow equipment $(-)_*\colon \mathcal{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathcal{V}\text{-}\mathsf{Prof}$ においては，命題 1.30 の逆が成り立つ：すなわち絶対余極限の重みは右随伴を持ち ([Str83])，したがって Cauchy 完備性はすべての絶対余極限を持つことと同値になる．一般の proarrow equipment においてこれが成り立つかは著者は知らない．

1.5 相対随伴と各点 Kan 拡張

$(-)_*\colon \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ を proarrow equipment とする．このとき，$\mathcal{K}$ の射 f に対して f_* の右随伴 f^* を得る対応は，対象上全単射で局所充満忠実な pseudo-functor

$$(-)^*\colon \mathcal{K}^{\mathrm{coop}} \to \mathcal{M}$$

を誘導するのであった．

定義 1.35. $\mathcal{K}$ の 2-セル

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[ur, bend left, "s"] \arrow[r, "j"'] & C \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\eta"] \end{tikzcd}$$

が j **に相対的な相対単位** (*relative unit relative to* j) であるとは，pseudo-functor $(-)^*$ で移したときに得られる 2-セル

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, bend right, "s^*"'] \\ A & C \arrow[l, "j^*"] \arrow[u, "t^*"'] \arrow[ul, phantom, "\Downarrow\eta^*"] \end{tikzcd}$$

が $\mathcal{M}$ の右 Kan 拡張となるときをいう．このとき s は t の**相対左随伴** (*relative left adjoint*) であるという．

同様に，$\mathcal{K}$ の 2-セル

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[ur, bend left, "s"] \arrow[r, "j"'] & C \arrow[ul, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] \end{tikzcd}$$

が j **に相対的な相対余単位** (*relative counit relative to* j) であるとは，pseudo-functor $(-)_*$ で移したときに得られる 2-セル

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "t_*"] \\ A \arrow[ur, bend left, "s_*"] \arrow[r, "j_*"'] & C \arrow[ul, phantom, "\Downarrow\varepsilon_*"] \end{tikzcd}$$

が $\mathcal{M}$ の右 Kan リフトとなるときをいう．このとき s は t の**相対右随伴** (*relative right adjoint*) であるという．

命題 1.36 ([Woo82, Proposition 11])**.** 相対随伴は絶対 Kan リフトである．

Proof. $\mathcal{K}$ の 2-セル

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[ur, bend left, "s"] \arrow[r, "j"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta" near end] & C \end{tikzcd}$$

を relative unit とするとき，これが $\mathcal{K}$ における絶対左 Kan リフトであることを示そう．$\mathcal{K}$ の 2-セル

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\chi"] & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[r, "j"'] & C \end{tikzcd}$$

を任意に取る．pseudo-functor $(-)^*\colon \mathcal{K}^{\mathrm{coop}} \to \mathcal{M}$ が局所充満忠実であることから，この 2-セルは $\mathcal{M}$ の 2-セル

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\chi^*"] & B \arrow[l, "b^*"'] \\ A \arrow[u, "a^*"] & C \arrow[l, "j^*"] \arrow[u, "t^*"'] \end{tikzcd}$$

と一対一に対応する．随伴 $a_* \dashv a^*$ の counit $\underline{a}\colon a_* \circ a^* \Rightarrow \mathrm{id}_A$ によって a^* は絶対右 Kan リフト $\mathrm{Rift}_{a_*} \mathrm{id}_A$ となるから，この 2-セルは

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "a_*"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & B \arrow[l, "b^*"'] \\ A & C \arrow[l, "j^*"] \arrow[u, "t^*"'] \end{tikzcd}$$

と一対一に対応する．仮定より η^* が右 Kan 拡張であることから，この 2-セルは

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "a_*"'] & B \arrow[l, "b^*"'] \arrow[dl, "s^*"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow" below=6pt] \\ A \end{tikzcd}$$

と一対一に対応する．再び counit $\underline{a}\colon a_* \circ a^* \Rightarrow \mathrm{id}_A$ が絶対右 Kan リフトであることから，この 2-セルは

$$\begin{tikzcd} X & B \arrow[l, "b^*"'] \arrow[dl, "s^*"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow" below=6pt] \\ A \arrow[u, "a^*"] \end{tikzcd}$$

と一対一に対応する．よって $(-)^*\colon \mathcal{K}^{\mathrm{coop}} \to \mathcal{M}$ が局所充満忠実であることから，$\mathcal{K}$ の 2-セル

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow" below=6pt] & B \\ A \arrow[ur, "s"'] \end{tikzcd}$$

と一対一に対応する．この対応の逆は η を pasting することで得られるから，したがって η は絶対左 Kan リフトである．

同様に relative counit が絶対右 Kan リフトであることがわかる． □

例 1.37. $\mathcal{K}$ の射 $j\colon A \to B$ が充満忠実であるとは，$\mathcal{M}$ における随伴の unit $\bar{j}\colon \mathrm{id}_A \Rightarrow j^* \circ j_*$ が同型であるときをいうのであった（定義 1.26）．系 1.17 より $j^* \circ j_* \cong \mathrm{Ran}_{j^*} j^*$ であるから，j が充満忠実であることは

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, bend right, "\mathrm{id}_A"'] \\ A & B \arrow[l, "j^*"] \arrow[u, "j^*"'] \arrow[ul, phantom, "\Downarrow 1"] \end{tikzcd}$$

が $\mathcal{M}$ における右 Kan 拡張であることと同値であり，言い換えれば $\mathcal{K}$ の 2-セル

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "j"] \\ A \arrow[ur, bend left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "j"'] & B \arrow[ul, phantom, "\Uparrow 1"] \end{tikzcd}$$

が relative unit であることと同値である．

注意 1.38. 豊穣圏のなす proarrow equipment $(-)_*\colon \mathcal{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathcal{V}\text{-}\mathsf{Prof}$ において，$1\colon j \to j \circ \mathrm{id}$ が relative unit であることは，j が豊穣関手として充満忠実であることと同値である．一方で，$1\colon j \to j \circ \mathrm{id}$ が絶対左 Kan リフトであることは，台関手 j_0 が通常の関手として充満忠実であることと同値であることがわかる．このことから，命題 1.36 の逆は一般に成り立たない．

しかし次が成り立つ．

命題 1.39 ([Woo82, Proposition 12])**.** $\mathcal{K}$ の 2-セル

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[ur, bend left, "s"] \arrow[r, "j"'] & C \arrow[ul, phantom, "\Uparrow \eta"] \end{tikzcd}$$

が絶対左 Kan リフトであるとする．このとき (1)j が左随伴である，もしくは (2)t が右随伴であるならば，η は relative unit である．

Proof. (1) j が左随伴で，r を右随伴に持つとする．このとき unit $\mathrm{id}_A \Rightarrow r \circ j$ は絶対左 Kan リ

フトだから

$$
\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, "t"] \\
& C \arrow[d, "r"] \\
A \arrow[uur, bend left, "s"] \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[uur, phantom, shift right=3, "\Uparrow\eta"] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\Uparrow"] & A
\end{tikzcd}
$$

も絶対左 Kan リフトである．特にこの 2-セルを unit として随伴 $s \dashv rt$ が成り立つ．このとき $s^* \dashv (rt)^*$ が成り立つから，$\mathcal{M}$ の 2-セル

$$
\begin{tikzcd}
& B \arrow[ddl, bend right, "s^*"'] \arrow[ddl, phantom, shift left=3, "\Downarrow\eta^*"] \\
& C \arrow[u, "t^*"'] \arrow[dl, "j^*"'] \arrow[dl, phantom, shift left=3, "\Downarrow"] \\
A & A \arrow[l, "\mathrm{id}_A"] \arrow[u, "r^*"']
\end{tikzcd}
$$

が絶対右 Kan 拡張となる．下の三角形は随伴 $j^* \dashv r^*$ の counit だから絶対右 Kan 拡張である．したがって η^* は $\mathcal{M}$ の右 Kan 拡張となり，η は relative unit である．

(2) t が右随伴で，f を左随伴に持つとする．このとき unit $\mathrm{id}_C \Rightarrow t \circ f$ は絶対左 Kan リフトだから

$$
\begin{tikzcd}
& & B \arrow[d, "t"] \\
A \arrow[r, "j"'] & C \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\Uparrow"] & C
\end{tikzcd}
$$

も左 Kan リフトである．よってこの 2-セルは η と同型である．このとき

$$
\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl, bend right, "s^*"'] \arrow[dl, phantom, shift left=3, "\Downarrow\eta^*"] \\
A & C \arrow[l, "j^*"] \arrow[u, "t^*"']
\end{tikzcd}
\quad \cong \quad
\begin{tikzcd}
& & B \arrow[dl, bend right, "f^*"'] \arrow[dl, phantom, shift left=3, "\Downarrow"] \\
A & C \arrow[l, "j^*"] & C \arrow[l, "\mathrm{id}_C"] \arrow[u, "t^*"']
\end{tikzcd}
$$

となる．右辺の右の三角形は随伴 $f^* \dashv t^*$ の counit だから絶対右 Kan 拡張である．したがって η^* は $\mathcal{M}$ の右 Kan 拡張となり，η は relative unit である． □

命題 1.40 ([Woo82, Proposition 13])**.** $\mathcal{K}$ の射 $j\colon A \to B$ が右随伴か左随伴を持つとする．このとき次は同値：

(i) j は充満忠実である．すなわち随伴 $j_* \dashv j^*$ の unit $\overline{j}\colon \mathrm{id}_A \Rightarrow j^* \circ j_*$ は同型である．

(ii) j は**表現可能的に充満忠実** (*representably full faithful*) である．すなわちすべての対象 $X \in \mathcal{K}$ に対して関手 $j \circ -\colon \mathcal{K}(X, A) \to \mathcal{K}(X, B)$ は充満忠実である．

Proof. 例 1.37 で見たように，条件 (i) は

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "j"] \\ A \arrow[ur, bend left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "j"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow 1"] & B \end{tikzcd}$$

が relative unit であることと同値である．一方，条件 (ii) はこの 2-セルが絶対左 Kan リフトであることと同値である．したがって主張は命題 1.36 と命題 1.39 より従う． □

定義 1.41. $\mathcal{K}$ の 2-セル

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "k"] & \\ A \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\kappa"] & C \end{tikzcd}$$

が f の j に沿った**各点左 Kan 拡張** (*pointwise left Kan extension*) であるとは，pseudo-functor $(-)^*$ で移したときに得られる 2-セル

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "j^*"'] & \\ A \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\kappa^*"] & C \arrow[ul, "k^*"'] \arrow[l, "f^*"] \end{tikzcd}$$

が $\mathcal{M}$ の右 Kan リフトとなるときをいう．

同様に，$\mathcal{K}$ の 2-セル

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "k"] & \\ A \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\kappa"] & C \end{tikzcd}$$

が f の j に沿った**各点右 Kan 拡張** (*pointwise right Kan extension*) であるとは，pseudo-functor $(-)_*$ で移したときに得られる 2-セル

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "k_*"] & \\ A \arrow[u, "j_*"] \arrow[r, "f_*"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\kappa_*"] & C \end{tikzcd}$$

が $\mathcal{M}$ の右 Kan 拡張となるときをいう．

注意 1.42. 2-セル $\kappa\colon f \Rightarrow k \circ j$ が各点左 Kan 拡張となるのは，ちょうど k が f の j^*-重み付き余極限となる，つまり $k \cong j^* \star f$ となるときである．

同様に 2-セル $\kappa\colon k \circ j \Rightarrow f$ が各点右 Kan 拡張となるのは，ちょうど k が f の j_*-重み付き極限となる，つまり $k \cong \{j_*, f\}$ となるときである．

命題 1.43. 各点 Kan 拡張は Kan 拡張である．

Proof. pseudo-functors $(-)^*, (-)_*$ が局所充満忠実であることから直ちに示せる． □

命題 1.44 ([Woo82, Proposition 14])**.** $\mathcal{K}$ の 2-セル $\kappa\colon f \Rightarrow k \circ j$ が各点左 Kan 拡張のとき，j が充満忠実ならば κ は同型である．

Proof. κ が各点左 Kan 拡張であるとき，

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "j^*"] \\ C \arrow[ur, bend left, "k^*"] \arrow[r, "f^*"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\kappa^*"] & A \end{tikzcd}$$

は右 Kan リフトである．一方，随伴 $j_* \dashv j^*$ の counit $\underline{j}\colon \mathrm{id}_B \Rightarrow j_* \circ j^*$ は絶対右 Kan リフトであるから，

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[d, "j_*"] \\ C \arrow[r, "k^*"'] & B \arrow[ur, bend left, "j^*"] \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\underline{j}"] & B \end{tikzcd}$$

も右 Kan リフトである．よって 2-セル

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[d, "j_*"] \\ & B \arrow[ur, bend left, "j^*"] \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\underline{j}"] & B \arrow[d, "j^*"] \\ C \arrow[ur, bend left, "k^*"] \arrow[rr, "f^*"'] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow\kappa^*"] & & A \end{tikzcd}$$

も右 Kan リフトである．ここで j は充満忠実であるから unit $\overline{j}\colon \mathrm{id}_A \Rightarrow j^* \circ j_*$ が同型である．よって上の 2-セルは f^* の id_A に沿った右 Kan リフトとなり，

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[d, "j_*"] \arrow[dd, bend left=60, "\mathrm{id}_A"] \\ & B \arrow[ur, bend left, "j^*"] \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\underline{j}"] & B \arrow[d, "j^*"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & {} \\ C \arrow[ur, bend left, "k^*"] \arrow[rr, "f^*"'] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow\kappa^*"] & & A \end{tikzcd} \quad \cong \quad \begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] \\ C \arrow[ur, "f^*"] \arrow[r, "f^*"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow 1"] & A \end{tikzcd}$$

が成り立つ．他方，随伴の三角等式より $j^* \cong j^* \circ j_* \circ j^* \xRightarrow{j^* \underline{j}} j^*$ が恒等 2-セルとなるから，左

辺は

$$\begin{tikzcd}
& & A \arrow[dd, "\mathrm{id}_A"] \\
& B \arrow[ur, bend left, "j^*"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\kappa^*"] & \\
C \arrow[ur, bend left, "k^*"] \arrow[rr, "f^*"'] & & A
\end{tikzcd}$$

になる．これが恒等 2-セル $1\colon \mathrm{id}_A \circ f^* \Rightarrow f^*$ と同型であるから，κ^* も同型である．したがって κ も同型となる． □

参考文献

[Bén67] Jean Bénabou. “Introduction to bicategories”. In: *Reports of the Midwest Category Seminar*. Vol. 47. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin-New York, 1967, pp. 1–77. DOI: 10.1007/BFb0074299. (Cit. on p. 3.)

[Bor94] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1, Basic Category Theory*. Vol. 50. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. (Cit. on p. 8.)

[Gar14] Richard Garner. “Diagrammatic characterisation of enriched absolute colimits”. *Theory and Applications of Categories* 29 (2014), No. 26, 775–780. (Cit. on p. 13.)

[Gra74] John W. Gray. *Formal category theory: adjointness for 2-categories*. Vol. 391. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974. (Cit. on p. 2.)

[JY21] Niles Johnson and Donald Yau. *2-dimensional categories*. Oxford University Press, Oxford, 2021. DOI: 10.1093/oso/9780198871378.001.0001. (Cit. on pp. 3, 7.)

[Kel82] G. M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory*. Vol. 64. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982. URL: http://tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html. Reprints in Theory and Applications of Categories 10, 1–136, 2005. (Cit. on p. 10.)

[Lor21] Fosco Loregian. *(Co)end calculus*. Vol. 468. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2021. DOI: 10.1017/9781108778657. (Cit. on p. 8.)

[Str83] Ross Street. “Absolute colimits in enriched categories”. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle* 24 (1983), no. 4, pp. 377–379. (Cit. on p. 14.)

[Woo82] R. J. Wood. “Abstract proarrows. I”. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* 23 (1982), no. 3, pp. 279–290. (Cit. on pp. 1, 2, 7, 9–12, 15–17, 19.)

[Woo85] R. J. Wood. “Proarrows. II”. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* 26 (1985), no. 2, pp. 135–168. (Cit. on pp. 2, 7.)