ファイバー圏とスタックの理論

@paper3510mm*

2022 年 1 月 3 日

概要

ファイバー圏とスタックの理論を解説する.

目次

---

* https://paper3510mm.github.io/notes.

Convention

- 圏といえば locally small であるとする．
- $\mathscr{C}$ を locally small な圏とする．$X \in \mathscr{C}$ に対し，X の表現する反変関手を $h_X = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, X)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ とかく．
- スキーム X の点 x での剰余体を $\kappa(x)$ と表す．
- すべての集合は自然に (small な) 圏とみなす．離散圏，すなわち恒等射以外に射を持たない圏も単に集合と呼ぶこともある．

0　はじめに

ファイバー圏とスタックの理論は，Grothendieck らによって descent theory を記述するために導入された．

ファイバー圏のひとつの見方は，前層の一般化である．前層は圏 $\mathscr{C}$ から集合の圏 Set への反変関手のことであるが，これを拡張して反変関手 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Cat}$（さらに言えば Cat の持つ 2-圏の構造まで利用した pseudo-functor）を考えることは自然である．Grothendieck 構成によって pseudo-functor から得られるような $\mathscr{C}$ 上の圏のことをファイバー圏と呼ぶ．

前層の一般化としてのファイバー圏の枠組みにおいて，層に対応するのがスタックである．スタックは，層の場合と同様，Grothendieck 位相を備えた圏上のファイバー圏であってある種の張り合わせ条件をみたすものとして定義される．

本稿では，Vistoli [Vis08] に従ってファイバー圏とスタックの理論を解説する．圏論の基本的な知識は仮定する．部分的にスキーム論の議論をしている箇所がある．できるだけ記号 * で印をつけているが，馴染みがなければ読み飛ばしても構わない．

1 章では，Grothendieck プレ位相について基本事項を確認する．

2 章では，ファイバー圏の基礎を解説する．

3 章では，スタックの理論を解説する（予定である）．

入門的な文献として，Vistoli [Vis08] と Streicher [Str21] を挙げておく．

1 Grothendieck プレ位相と層

1.1 Grothendieck プレ位相

1.1.1 Grothendieck プレ位相の定義と例

位相空間上の層の概念を思い出すと，層を定義するためには位相構造は必要なく，開集合の被覆の概念があればよいことがわかる．この構造を捉え公理化したものが Grothendieck (プレ) 位相である．

位相空間 X の開集合とその間の包含写像のなす圏を $\mathsf{Open}(X) = X_{\mathrm{cl}}$ と表す．

定義 1.1. $\mathscr{C}$ を圏とする．$\mathscr{C}$ 上の **Grothendieck プレ位相** (*Grothendieck pretopology*) とは，各対象 $U \in \mathscr{C}$ に対して U を codomain にもつ $\mathscr{C}$ の射の集合 $\{U_i \to U\}$ の集まり $\mathrm{Cov}(U)$ を割り当てる対応 Cov であって，次の条件 (GT1)–(GT3) をみたすもののことである．$\mathrm{Cov}(U)$ の元を U の**被覆** (*covering*) という．

(GT1) $V \to U$ が同型ならば，$\{V \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ である

(GT2) 任意の射 $V \to U$ と被覆 $\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して，すべての i で pullback $U_i \times_U V$ が存在して，$\{U_i \times_U V \to V\}_i \in \mathrm{Cov}(V)$ となる

(GT3) 被覆 $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ と U_i の被覆 $\{V_{ij} \to U_i\}_{j \in J_i}$ があるとき，$\{V_{ij} \to U_i \to U\}_{i \in I, j \in J_i}$ はまた U の被覆になる

圏 $\mathscr{C}$ とその上の Grothendieck プレ位相の組 $(\mathscr{C}, \mathrm{Cov})$ を**景** (*site*) という．

注意 1.2. 定義 1.1 で導入した概念は，[SGL] でいう basis for a Grothendieck topology のことである．[Vis08] では，Grothendieck プレ位相を単に Grothendieck 位相と呼んでいる．Grothendieck topology のより一般的な定義は，1.3 節で定義する sieve の概念を用いたものであり，Grothendieck pretopology から Grothendieck topology が一つ定まる (定義 1.16)．本稿では pretopology を中心に扱う．

命題 1.3. site $\mathscr{C}$ の対象 U の被覆 $\{U_i \to U\}_i, \{V_j \to V\}_j \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して，$\{U_i \times_U V_j \to U\}_{i,j}$ も U の被覆である．

Proof. (GT2) より，各 i で $\{U_i \times_U V_j \to U_i\}_j$ は U_i の被覆だから，(GT3) より $\{U_i \times_U V_j \to U_i \to U\}_{i,j}$ も U の被覆である． □

例 1.4. 次は Grothendieck プレ位相である．

(i) (small classical topology). 位相空間 X に対して poset $\mathscr{C} = \mathsf{Open}(X) = X_{\mathrm{cl}}$ を圏とみな

す．対象 $U \in \mathsf{Open}(X)$ に対して

$$\begin{aligned}&\{U_i \subseteq U\}_i \in \mathrm{Cov}(U)\\ \iff& \bigcup_i U_i = U\end{aligned}$$

と定めると，この対応は $\mathsf{Open}(X)$ 上の Grothendieck プレ位相となる．この場合 $U_1 \hookrightarrow U$ と $U_2 \hookrightarrow U$ に対して $U_1 \times_U U_2 = U_1 \cap U_2$ であることに注意する．

(ii) (big classical topology). $\mathscr{C} = \mathsf{Top}$ とする．$U \in \mathsf{Top}$ に対して

$$\begin{aligned}&\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U)\\ \iff& \text{各 } U_i \to U \text{ は開埋め込みで，} \coprod_i U_i \to U \text{ は全射}\end{aligned}$$

と定めると，この対応は Top 上の Grothendieck プレ位相となる．ここで開埋め込みとは，単射な連続開写像のことである．

(iii) (big étale topology for topological spaces). $\mathscr{C} = \mathsf{Top}$ とする．$U \in \mathsf{Top}$ に対して

$$\begin{aligned}&\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U)\\ \iff& \text{各 } U_i \to U \text{ は局所同相で，} \coprod_i U_i \to U \text{ は全射}\end{aligned}$$

と定めると，この対応は Top 上の Grothendieck プレ位相となる．

(iv) (small étale topology for a scheme). スキーム X に対し，étale な射 $U \to X$ のなす Sch/X の充満部分圏を $\mathscr{C} = X_{\mathrm{et}}$ とする．étale 射の cancellation より X_{et} の射はすべて étale 射である．$U \in X_{\mathrm{et}}$ に対して

$$\begin{aligned}&\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U)\\ \iff& \coprod_i U_i \to U \text{ は全射}\end{aligned}$$

と定めると，この対応は X_{et} 上の Grothendieck プレ位相となる．

(v) (big Zariski topology). $\mathscr{C} = \mathsf{Sch}/S$ とする．$U \in \mathsf{Sch}/S$ に対して

$$\begin{aligned}&\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U)\\ \iff& \text{各 } U_i \to U \text{ は open immersion で，} \bigcup_i U_i = U\end{aligned}$$

と定めると，この対応は Sch/S 上の Grothendieck プレ位相となる．

(vi) (big étale topology). $\mathscr{C} = \mathsf{Sch}/S$ とする．$U \in \mathsf{Sch}/S$ に対して

$$\begin{aligned}&\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U)\\ \iff& \text{各 } U_i \to U \text{ は étale で，} \coprod_i U_i \to U \text{ は全射}\end{aligned}$$

と定めると，この対応は Sch/S 上の Grothendieck プレ位相となる．

(vii) (smooth topology). $\mathscr{C} = \mathsf{Sch}/S$ とする．$U \in \mathsf{Sch}/S$ に対して

$$\begin{aligned} &\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U) \\ &\iff \text{各 } U_i \to U \text{ は smooth で，} \coprod_i U_i \to U \text{ は全射} \end{aligned}$$

と定めると，この対応は Sch/S 上の Grothendieck プレ位相となる．

(viii) (fppf topology). $\mathscr{C} = \mathsf{Sch}/S$ とする．$U \in \mathsf{Sch}/S$ に対して

$$\begin{aligned} &\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U) \\ &\iff \text{各 } U_i \to U \text{ は flat かつ locally of finite presentation で，} \coprod_i U_i \to U \text{ は全射} \end{aligned}$$

と定めると，この対応は Sch/S 上の Grothendieck プレ位相となる．

fppf とは，“fidèlement plat et de présentation finie” の略である．

site $\mathscr{C}$ のスライス圏 $\mathscr{C}/S$ には，自然な方法で Grothendieck プレ位相が与えられる．

定義 1.5. $(\mathscr{C}, \mathrm{Cov}_{\mathscr{C}})$ を site とし，$S \in \mathscr{C}$ をとる．スライス圏 $\mathscr{C}/S$ において，$U = (U \to S) \in \mathscr{C}/S$ に対し，

$$\begin{aligned} &\{U_i \xrightarrow{f_i} U \text{ in } \mathscr{C}/S\}_i \in \mathrm{Cov}_{\mathscr{C}/S}(U) \\ &\iff \{U_i \xrightarrow{f_i} U \text{ in } \mathscr{C}\}_i \in \mathrm{Cov}_{\mathscr{C}}(U) \end{aligned}$$

と定めると，対応 $\mathrm{Cov}_{\mathscr{C}/S}$ は $\mathscr{C}/S$ 上の Grothendieck プレ位相を定める．この位相を $\mathscr{C}/S$ の *comma topology* という．

例 1.6. Zariski (étale, fppf) 位相を与えた site Sch に対し，Sch/S 上の comma topology は Sch/S 上の Zariski (étale, fppf) 位相に一致する．次小節で扱う fpqc 位相についても成り立つ．

1.1.2 例：fpqc 位相 *

スキームの圏上の Grothendieck(プレ) 位相には，上述したものの他にも fpqc topology と呼ばれるものがある．

locally of finite presentation でない被覆を考えることは，ときに役に立つことがある．そのような位相は，例えば Sch/S 上で

$$\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U) \iff \coprod_i U_i \to U \text{ は faithfully flat}$$

として定めることができるが，この位相は良い振る舞いをせず，何らかの有限性を課す必要がある．

命題 1.7. 全射なスキームの射 $f\colon X \to Y$ に対して，以下は同値である．

(i) 任意の quasi-compact 開集合 $V \subseteq Y$ に対して，ある quasi-compact 開集合 $U \subseteq X$ が存在して $f(U) = V$ となる．

(ii) Y のアフィン開被覆 $\{V_i\}_i$ であって，各 i について V_i が X の quasi-compact 開集合 U_i の像になっている (i.e. $f(U_i) = V_i$) ものが存在する．

(iii) 各点 $x \in X$ において，x の開近傍 $U \subseteq X$ が存在して，$f(U)$ は Y の開集合であってかつ $f|_U : U \to f(U)$ が quasi-compact となる．

(iv) 各点 $x \in X$ において，x の quasi-compact な開近傍 $U \subseteq X$ が存在して，$f(U)$ は Y のアフィン開集合となる．

Proof. (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (i) を示す．

(iii) $\Rightarrow$ (iv): 各 $x \in X$ について，x の開近傍 $U' \subseteq X$ で，$f(U')$ は Y の開集合であってかつ $f|_{U'} : U' \to f(U')$ が quasi-compact となるものが存在する．$f(x)$ のアフィン開集合 V で $x \in V \subseteq f(U')$ なるものをとる．このとき $U = f^{-1}(V)$ とおけば，$f|_{U'}$ が quasi-compact 射であることから，U は x の quasi-compact な開近傍である．f は全射だから $f(U) = V$ となりこれはアフィン開集合である．

(iv) $\Rightarrow$ (iii): quasi-compact なスキームからアフィンスキームへの射は常に quasi-compact であることから従う．

(iv) $\Rightarrow$ (ii): f が全射であることから明らか．

(ii) $\Rightarrow$ (iv): 各 $x \in X$ について，(ii) より $f(x) \in f(U') = V$ となるアフィン開集合 $V \subseteq Y$ と quasi-compact な開集合 $U' \subseteq X$ がとれる．$x \in U'' \subseteq f^{-1}(V)$ なるアフィン開集合 $U'' \subseteq X$ をとるとき，$U = U' \cup U''$ とおけば，これは x の quasi-compact な開近傍で $f(U) = V$ はアフィン開集合になる．

(i) $\Rightarrow$ (ii): アフィンスキームは quasi-compact だから明らか．

(ii) $\Rightarrow$ (i): quasi-compact な開集合 $V \subseteq Y$ を任意に取る．(ii) のアフィン開被覆 $\{V_i\}_i$ に対して

$$\{W \subseteq Y : \text{affine open} \mid \exists i,\ W \subseteq V \cap V_i\}$$

は V の開被覆であるから，その有限部分被覆 $\{W_1, \ldots, W_r\}$ がとれる．各 W_j に対し，$W_j \subseteq V \cap V_{i(j)}$ なる添え字 $i(j)$ を一つ取っておく．また被覆 $\{V_i\}_i$ の取り方から，$f(U_{i(j)}) = V_{i(j)}$ なる quasi-compact 開集合 $U_{i(j)} \subseteq X$ が存在する．このとき，

$$f|_{U_{i(j)}} : U_{i(j)} \to V_{i(j)}$$

は quasi-compact なスキームからアフィンスキームへの射なので quasi-compact 射になり，よって $W'_j \coloneqq f^{-1}(W_j)$ は quasi-compact 開集合となる．$U = \bigcup_{j=1}^r W'_j$ とおけば，U も quasi-compact 開集合であって

$$f(U) = \bigcup_{j=1}^r f(W'_j) = \bigcup_{j=1}^r W_j = V$$

となる. $\square$

特に，quasi-compact な全射 f はこの命題の同値条件をみたす．

定義 1.8. スキームの射が *fpqc* であるとは，忠実平坦かつ命題 1.7 の同値な条件をみたすときをいう．

fpqc とは，“fidèlement plat et quasi-compact” の略である．

特に，quasi-compact な忠実平坦射 f は fpqc である．

命題 1.9. fpqc 射は次のような性質をもつ．

(i) fpqc 射の合成は fpqc 射である．

(ii) スキームの射 $f\colon X \to Y$ と Y の開被覆 $\{V_i\}_i$ に対して，各 i で $f|_{f^{-1}(V_i)} : f^{-1}(V_i) \to V_i$ が fpqc であるとき，f も fpqc である．

(iii) 開かつ忠実平坦なスキームの射は fpqc である．

(iv) 忠実平坦かつ locally of finite presentation なスキームの射は fpqc である．

(v) fpqc 射は base change で安定である．

(vi) $f\colon X \to Y$ が fpqc 射であるとき，部分集合 $V \subseteq Y$ に対して，V が Y の開集合であることと $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることは同値である．

Proof. 省略. $\square$

Sch/S 上で，$U \in \mathsf{Sch}/S$ に対して

$$\begin{aligned} &\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U) \\ \iff &\coprod_i U_i \to U \text{ は fpqc 射} \end{aligned}$$

と定めると，この対応は Sch/S 上の Grothendieck プレ位相となる．これを fpqc topology という．

Sch/S 上の Grothendieck プレ位相をいくつか紹介したが，相互の関係は次の通り：

$$(\text{Zariski}) \subseteq (\text{étale}) \subseteq (\text{smooth}) \subseteq (\text{fppf}) \subseteq (\text{fpqc}).$$

例えば $\{U_i \to U\}_i$ が Zariski 被覆ならば fpqc 被覆でもある．

1.2 Site 上の層

位相空間 X 上の前層とは，反変関手 $\mathsf{Open}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ のことであった．より一般に圏 $\mathscr{C}$ に対して，反変関手 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ のことを，$\mathscr{C}$ 上の**前層** (*presheaf*) という．$\mathscr{C}$ 上の前層のなす圏とは $\mathsf{PSh}(\mathscr{C}) = [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]$ のことである．

位相空間上の前層と同様に，site $\mathscr{C}$ 上の前層 $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ と $U \in \mathscr{C}$ の被覆 $\{f_i\colon U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U)$ があるとき，$a \in F(U)$ に対して $a|_{U_i} = F(f_i)(a) \in F(U_i)$ という記法を用いる．

定義 1.10. $\mathscr{C}$ を site，$F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ を $\mathscr{C}$ 上の前層とする．

(i) F が**分離的前層** (*separated presheaf*) であるとは，任意の $U \in \mathscr{C}$ の被覆 $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ と U 上の切断 $a, b \in F(U)$ に対して，すべての $i \in I$ で $a|_{U_i} = b|_{U_i}$ が成り立つならば，$a = b$ となるときをいう．

(ii) F が**層** (*sheaf*) であるとは，任意の $U \in \mathscr{C}$ とその被覆 $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ と切断 $a_i \in F(U_i)$ に対して，すべての $i, j \in I$ で $\mathrm{pr}_1^* a_i = \mathrm{pr}_2^* a_j \in F(U_i \times_U U_j)$ が成り立つならば，$a|_{U_i} = a_i$ となる $a \in F(U)$ が一意的に存在するときをいう．

層のなす $\mathsf{PSh}(\mathscr{C})$ の充満部分圏を $\mathsf{Sh}(\mathscr{C})$ と表す．

明らかに層は separated presheaf である．
位相空間上の層と同様に，層の条件は equalizer で表せる．

命題 1.11. $\mathscr{C}$ を site，$F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ を前層とする．

(i) F が separated である必要十分条件は，任意の $U \in \mathscr{C}$ とその被覆 $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して

$$e\colon F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i); \quad f \mapsto (f|_{U_i})_i$$

が単射であることである．

(ii) F が層である必要十分条件は，任意の $U \in \mathscr{C}$ とその被覆 $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "e"] & \displaystyle\prod_{i\in I} F(U_i) \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_1^*"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2^*"'] & \displaystyle\prod_{i,j\in I} F(U_i \times_U U_j) \end{tikzcd}$$

が equalizer 図式になることである．

Proof. 明らか． □

site $\mathscr{C}$ 上の反変関手 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Grp}$ (ないし $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ring}$) が群の層 (環の層) であるとは，忘却関手との合成 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Grp} \hookrightarrow \mathsf{Set}$ (ないし $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ring} \hookrightarrow \mathsf{Set}$) が層であるときをいう．

1.3 Sieve

圏 $\mathscr{C}$ の対象 U に対し，U を codomain にもつ $\mathscr{C}$ の射の族 $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}_i$ を考える．h_U の**部分関手** (*subfunctor*) $h_{\mathcal{U}} \colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ が，$T \in \mathscr{C}$ に対して集合

$$h_{\mathcal{U}}(T) = \{T \to U \mid T \to U \text{ はある } U_i \to U \text{ を通じて分解する }\}$$

を対応させることによって定まる．$h_{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{U}$ に付随する sieve と呼ばれる．

> **定義 1.12.** 圏 $\mathscr{C}$ の対象 U に対し，U 上の**篩** (*sieve*) とは，$h_U \colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ の部分関手のことをいう．$\mathcal{S}$ が U 上の sieve であるとき，$\mathcal{S} \subseteq h_U$ と書く．

注意 1.13. $S \subseteq h_U$ を U 上の sieve とするとき，U への射の集まり

$$\mathcal{S} = \coprod_{T \in \mathscr{C}} S(T)$$

を考えると，$\mathcal{S}$ は

(sieve) 任意の射 $T' \xrightarrow{h} T \xrightarrow{f} U$ に対して，$f \in \mathcal{S}$ ならば $f \circ h \in \mathcal{S}$ となる

をみたす．逆に条件 1.13 をみたす U への射の集まり $\mathcal{S}$ があるとき，$T \in \mathscr{C}$ に対して

$$S(T) = \{T \xrightarrow{f} U \mid f \in \mathcal{S}\}$$

と置くことで，S は U 上の sieve となる．このことから，sieve は条件 1.13 をみたす U への射の集まりと同一視される．

$\mathscr{C}$ を site とし，F をその上の前層とする．$U \in \mathscr{C}$ の被覆 $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd} \prod_{i \in I} F(U_i) \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_1^*"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2^*"'] & \prod_{i,j \in I} F(U_i \times_U U_j) \end{tikzcd}$$

の equalizer を $F\mathcal{U}$ とする．つまり

$$F\mathcal{U} \coloneqq \left\{ (x_i) \in \prod_{i \in I} F(U_i) \,\middle|\, \forall\, i, j \in I,\ \mathrm{pr}_1^* x_i = \mathrm{pr}_2^* x_j \right\}$$

と置く．このとき equalizer の普遍性より

$$\begin{tikzcd} FU \arrow[d, dashed, "E"'] \arrow[rd] & & \\ F\mathcal{U} \arrow[r] & \prod_{i \in I} F(U_i) \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_1^*"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2^*"'] & \prod_{i,j \in I} F(U_i \times_U U_j) \end{tikzcd}$$

なる射 $E\colon FU \to F\mathcal{U}$ が一意的に存在する．定義から明らかに

$$F \text{ は層である} \iff E\colon FU \to F\mathcal{U} \text{ は同型である}$$

である．

命題 1.14. site $\mathscr{C}$ 上の前層 $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ と，$U \in \mathscr{C}$ の被覆 $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して，

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(h_U, F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & FU \arrow[d, "E"] \\ \mathrm{Hom}(h_{\mathcal{U}}, F) \arrow[r, "R"] & F\mathcal{U} \end{tikzcd}$$

を可換にする全単射写像 $R\colon \mathrm{Hom}(h_{\mathcal{U}}, F) \xrightarrow{\cong} F\mathcal{U}$ が存在する．ここで上辺の同型は米田の補題の同型であり，左辺の射は $h_{\mathcal{U}} \hookrightarrow h_U$ による制限射である．

Proof. まず写像 R を構成しよう．自然変換 $\phi\colon h_{\mathcal{U}} \to F$ をとる．各 i について $(U_i \to U) \in h_{\mathcal{U}}(U_i)$ だから，$\phi_{U_i}(U_i \to U) \in F(U_i)$ となる．

$$R(\phi) = (\phi_{U_i}(U_i \to U))_i \in \prod_i F(U_i)$$

とおくとき，任意の i, j に対し $U_{ij} = U_i \times_U U_j$ とすれば，ϕ の自然性から

$$\mathrm{pr}_1^*(\phi_{U_i}(U_i \to U)) = \phi_{U_{ij}}(U_{ij} \to U) = \mathrm{pr}_2^*(\phi_{U_j}(U_j \to U))$$

となる．よって $R(\phi) \in F\mathcal{U}$ が成り立つ．こうして写像

$$R\colon \mathrm{Hom}(h_{\mathcal{U}}, F) \longrightarrow F\mathcal{U}$$

が定まる．これは確かに上の図式を可換にすることもわかる．

R が全単射であることを示そう．自然変換 $\phi, \psi\colon h_{\mathcal{U}} \to F$ に対し $R(\phi) = R(\psi)$ とする．任意の $(T \to U) \in h_{\mathcal{U}}(T)$ に対して，

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "f"'] & & U \\ & U_i \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

なる i と f が存在する．このとき自然性と $R(\phi) = R(\psi)$ より

$$\phi_T(T \to U) = f^*\phi_{U_i}(U_i \to U) = f^*\psi_{U_i}(U_i \to U) = \psi_T(T \to U)$$

となり $\phi = \psi$ が成り立つ．よって R は単射である．

また，$(\xi_i) \in F\mathcal{U}$ を任意にとる．$(T \to U) \in h_{\mathcal{U}}(T)$ に対して

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "f"'] & & U \\ & U_i \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

なる i と f をとると，$\phi_T(T \to U) = f^*\xi_i \in F(T)$ が定まる．もし

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "g"'] & & U \\ & U_j \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

なる j と g があっても，

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\ & U_{ij} \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & U_j \arrow[d] \\ & U_i \arrow[r] & U \end{tikzcd}$$

となる射 k をとれば

$$f^*\xi_i = k^*\mathrm{pr}_1^*\xi_i = k^*\mathrm{pr}_2^*\xi_j = g^*\xi_j$$

となり，$\phi_T(T \to U)$ は分解に依らず well-defined である．この対応によって写像 $\phi_T\colon h_{\mathcal{U}}(T) \to F(T)$ を得る．これは自然性をみたし，自然変換 $\phi\colon h_{\mathcal{U}} \to F$ を定め，構成から $R(\phi) = (\xi_i)_i$ が成り立つ．よって R は全射である． □

系 1.15. site $\mathscr{C}$ 上の前層 $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ に対して，F が separated presheaf/sheaf であることは，任意の $U \in \mathscr{C}$ とその被覆 $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して，$\mathrm{Hom}(h_U, F) \to \mathrm{Hom}(h_{\mathcal{U}}, F)$ が単射/全単射であることと同値である．

Proof. 命題 1.14 より明らか． □

定義 1.16. $\mathscr{C}$ を圏とし，$\mathcal{T}$ を $\mathscr{C}$ 上の Grothendieck プレ位相とする．$U \in \mathscr{C}$ に対し U 上の sieve $\mathcal{S} \subseteq h_U$ が $\mathcal{T}$ の *covering sieve* である (または，**$\mathcal{T}$ に属する** (*belong to* $\mathcal{T}$)) とは，ある U の被覆 $\mathcal{U} \in \mathcal{T}(U) = \mathrm{Cov}_{\mathscr{C}}(U)$ が存在して $h_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{S}$ となるときをいう．

site $(\mathscr{C}, \mathcal{T})$ に対し，$\mathcal{T}$ の covering sieve を単に $\mathscr{C}$ の sieve ということもある[*1]．

命題 1.17. site $(\mathscr{C}, \mathcal{T})$ 上の前層 $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ に対して， F が separated presheaf/sheaf であることは，任意の $\mathcal{T}$ の covering sieve $\mathcal{S} \subseteq h_U$ に対して，$\mathrm{Hom}(h_U, F) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, F)$ が単射/全単射であることと同値である．

Proof. 被覆 $\mathcal{U} \in \mathcal{T}(U)$ に対して，付随する sieve $h_{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{T}$ の covering sieve であるから，系 1.15 より $(\Leftarrow)$ はいずれも明らかである．

[*1] $U \in \mathscr{C}$ に対して U 上の $\mathcal{T}$ の covering sieve 全体を $J(U)$ とすれば，この対応によって pretopology から topology が得られる．

$(\Rightarrow)$ を示そう．$\mathcal{T}$ の covering sieve $\mathcal{S}$ に対して，被覆 $\mathcal{U} \in \mathcal{T}(U)$ があって $h_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{S} \subseteq h_U$ となる．系 1.15 より，F が separated presheaf/sheaf ならば

$$\mathrm{Hom}(h_U, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(h_{\mathcal{U}}, F)$$

は単射/全単射になる．よって F が separated のとき，$\mathrm{Hom}(h_U, F) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, F)$ は単射.

F が sheaf のとき，$\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, F) \to \mathrm{Hom}(h_{\mathcal{U}}, F)$ が全射である．これが単射であることを示せればよい．自然変換 $\phi, \psi \colon \mathcal{S} \to F$ について

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[dr, "\phi"] & \\ h_{\mathcal{U}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & F \\ & \mathcal{S} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

が可換であるとする．被覆 $\mathcal{U}$ を $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}_i$ とおくと，任意の $(T \xrightarrow{f} U) \in \mathcal{S}(T)$ に対し，$\mathcal{U}$ の射を f で引き戻して $\{T \times_U U_i \xrightarrow{p_i} T\} \in \mathcal{T}(T)$ が得られる．自然性と $(f \circ p_i \colon T \times_U U_i \to U) \in h_{\mathcal{U}}(T \times_U U_i)$ であることから，各 i で

$$p_i^* \phi_T(f) = \phi(f \circ p_i) = \psi(f \circ p_i) = p_i^* \psi_T(f).$$

F は separated であるから，$\phi_T(f) = \psi_T(f)$ となり，よって $\phi = \psi$ が成り立つ．したがって $\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, F) \to \mathrm{Hom}(h_{\mathcal{U}}, F)$ は全単射で，$\mathrm{Hom}(h_U, F) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, F)$ も全単射. □

注意 1.18. 一般の topology に対する層の定義は命題 1.17 の特徴づけを用いて定義される．

site $\mathscr{C}$ の被覆 $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}_i, \mathcal{V} = \{V_j \to U\}_j \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して，

$$h_{\mathcal{U} \times_U \mathcal{V}} \coloneqq \{U_i \times_U V_j \to U\}_{i,j}$$

と定めると，これは U 上の被覆である．射 $T \to U$ があるとき，

$$T \to U \text{ がある } U_i \times_U V_j \text{ を経由する} \iff T \to U \text{ がある } U_i \text{ と } V_j \text{ を経由する}$$

が成り立つ．

命題 1.19. $\mathscr{C}$ を site とする．

(1) U 上の被覆 $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}_i$ と $\mathcal{V} = \{V_j \to U\}_j$ に対し，$h_{\mathcal{U} \times_U \mathcal{V}} = h_{\mathcal{U}} \cap h_{\mathcal{V}}$ である．

(2) U 上の covering sieve $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ に対し，$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ も U 上の covering sieve である．

Proof. 明らか. □

1.4 Grothendieck プレ位相の同値性

異なる Grothendieck プレ位相でも，定める層の圏が等しくなる場合がある．

定義 1.20. 圏 $\mathscr{C}$ の対象 U へ向かう射の族 $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}_{i\in I}, \mathcal{V} = \{V_j \to U\}_{j\in J} \subseteq \mathrm{mor}(\mathscr{C})$ に対し，$\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ の**細分** (*refinement*) であるとは,

$$\forall j \in J, \quad \exists i \in I, \qquad \begin{tikzcd} V_j \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "\exists"'] & \circlearrowleft & U \\ & U_i \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

となるときをいう.

命題 1.21. 圏 $\mathscr{C}$ の対象 U へ向かう射の族 $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}_{i\in I}, \mathcal{V} = \{V_j \to U\}_{j\in J} \subseteq \mathrm{mor}(\mathscr{C})$ に対し,

$$\mathcal{V} \text{ は } \mathcal{U} \text{ の細分である} \iff h_{\mathcal{V}} \subseteq h_{\mathcal{U}}.$$

Proof. 明らか. □

細分の細分はまた細分になるから，細分であるという関係は U への射の族の集合上の preoder になる.

定義 1.22. 圏 $\mathscr{C}$ 上に二つの Grothendieck プレ位相 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ が与えられているとする.

(i) $\mathcal{T}$ が $\mathcal{T}'$ **に従属する** (*subordinate to* $\mathcal{T}'$) とは，$\mathcal{T}$ の任意の covering sieve が $\mathcal{T}'$ に細分を持つときをいう．このとき $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}'$ と表す.

(ii) $\mathcal{T}$ が $\mathcal{T}'$ **に同値である** (*equivalent to* $\mathcal{T}'$) とは，$\mathcal{T} \prec \mathcal{T}'$ かつ $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$ であるときをいう．このとき $\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}'$ と表す.

命題 1.23. 圏 $\mathscr{C}$ 上の Grothendieck プレ位相 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ に対して,

$$\mathcal{T} \prec \mathcal{T}' \iff \mathcal{T} \text{ の covering sieve はすべて } \mathcal{T}' \text{ の covering sieve でもある.}$$

特に $\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}'$ であることと，$\mathcal{T}$ と $\mathcal{T}'$ の covering sieve のクラスは一致することは同値である.

Proof. 定義 1.22 と命題 1.21 より明らかである. □

この命題から，$\mathscr{C}$ 上の pretopology $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ が同じ topology を生成するとき，同値であるということがわかる.

命題 1.24. 圏 $\mathscr{C}$ 上の Grothendieck プレ位相 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ に対して，$\mathcal{T} \prec \mathcal{T}'$ ならば，$\mathcal{T}'$-sheaf は $\mathcal{T}$-sheaf でもある．特に，$\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}'$ ならば $\mathsf{Sh}(\mathscr{C}, \mathcal{T}) = \mathsf{Sh}(\mathscr{C}, \mathcal{T}')$ が成り立つ.

Proof. 命題 1.23 と命題 1.17 より従う. □

例 1.25. 1.1 節で紹介した Grothendieck プレ位相の従属性は次の通り．

(i) 位相空間の圏 Top 上の big classical topology と big étale topology は同値である．

$$\text{(big classical)} \equiv \text{(big étale)}$$

(ii) S-スキームの圏 Sch/S 上の étale topology と smooth topology は同値である．

$$\text{(Zariski)} \prec \text{(étale)} \equiv \text{(smooth)} \prec \text{(fppf)} \prec \text{(fpqc)}$$

特に，fpqc sheaf は Zariski sheaf である．

1.5 表現可能関手の層条件

1.5.1 Subcanonical 位相

反変な表現可能関手は前層であるので，層であるかどうかを議論することができる．例えば，Top 上の表現可能前層は常に層である：

命題 1.26. 位相空間の圏 Top 上の表現可能関手 $h_X \colon \mathsf{Top}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ は，Top 上の big classical topology について層になる．

Proof. 位相空間 $U \in \mathsf{Top}$ に対し，その被覆 $\{U_i \hookrightarrow U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$，すなわち通常の意味での開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ をとる．$(f_i \colon U_i \to X) \in h_X(U_i)$ $(i \in I)$ について，

$$\forall\, i, j \in I, \quad f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j} : U_i \cap U_j \longrightarrow X$$

であるとする．このとき写像 $f \colon U \to X$ を，$x \in U$ に対して $x \in U_i$ なる i をとって

$$f(x) \coloneqq f_i(x)$$

と定める．$x \in U_j$ でもあるとき，$x \in U_i \cap U_j$ だから $f_i(x) = f_j(x)$ となり，$f(x)$ は well-defined である．すると，$f|_{U_i} = f_i$ が成り立ち，f は連続写像となる．このような f は明らかに一意的であるから，したがって h_X は Top 上の層である． □

同様にして次も示せる．

命題 1.27. スキームの圏 Sch 上の表現可能関手 $h_X \colon \mathsf{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ は，Sch 上の (big) Zariski topology について層になる．

Proof. 命題 1.26 と同様. □

定義 1.28. 圏 $\mathscr{C}$ 上の Grothendieck プレ位相 $\mathcal{T}$ に対して，$\mathcal{T}$ が *subcanonical* であるとは，すべての $\mathscr{C}$ 上の表現可能前層が $\mathcal{T}$ について層になるときをいう．subcanonical topology をもつ site を *subcanonical site* という．subcanonical な位相のなかで最大のものを *canonical topology* という．

命題 1.26 より Top 上の big classical topology は subcanonical であり，命題 1.27 より Sch 上の Zariski topology も subcanonical である．次の命題 1.29 より，任意のスキーム S に対して Sch/S 上の Zariski topology も subcanonical であることがわかる．

命題 1.29. site $\mathscr{C}$ と対象 $S \in \mathscr{C}$ に対して，$\mathscr{C}$ の位相が subcanonical であるならば，$\mathscr{C}/S$ 上の comma topology も subcanonical である．

Proof. 対象 $X \in \mathscr{C}$ と被覆 $\{U_i \to U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}_{\mathscr{C}/S}(U)$ に対して，

$$\mathrm{Hom}_S(U, X) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_S(U_i, X) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} \mathrm{Hom}_S(U_{ij}, X)$$

が equalizer 図式であることを示せばよい．ここで Hom_S は $\mathscr{C}/S$ での射の集合であることを表し，$U_{ij} = U_i \times_U U_j$ とおいた．

まず $\mathscr{C}$ が subcanonical より $h_X \colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ が層であるから

$$\mathrm{Hom}(U, X) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(U_i, X)$$

は単射で，これを制限することで

$$\mathrm{Hom}_S(U, X) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_S(U_i, X)$$

も単射とわかる．

また $(f_i)_i \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_S(U_i, X)$ について

$$\forall i, j \in I, \quad f_i \circ \mathrm{pr}_1 = f_j \circ \mathrm{pr}_2 \colon U_{ij} \to X \text{ in } \mathscr{C}/S$$

であるとする．このとき，$h_X \colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ が層であるから

$$\exists! \, f \in \mathrm{Hom}(U, X), \quad \forall i, \quad \begin{tikzcd} U_i \arrow[r] \arrow[dr, "f_i"'] & U \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd} \text{ in } \mathscr{C}$$

となる．ここで $\mathscr{C}$ の射 $U \xrightarrow{f} X \to S$，$U \to S$ は，$U_i \to U$ と合成すると一致するから，h_S が層であることより $\mathscr{C}$ の射として

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

が可換になる．よって $f\colon U \to X$ は $f \in \mathrm{Hom}_S(U, X)$ を定め，$f|_{U_i} = f_i$ をみたす．したがって表現可能前層 $\mathrm{Hom}_S(-, X)\colon (\mathscr{C}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ は層である． □

1.5.2 fpqc 位相は subcanonical である *

Sch/S 上には，Zariski topology より弱い位相が考えられることを 1.1 節で紹介した．Zariski topology は subcanonical であったが，より広く次の定理が成り立つ．

定理 1.30. S-スキームの圏 Sch/S 上の表現可能関手 $F\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ は，Sch/S 上の fpqc topology について層になる．言い換えれば，fpqc site Sch/S は subcanonical である．

この定理より，Sch/S 上の表現可能前層は特に fppf 位相や étale 位相についても層になる．

この小節では，定理 1.30 を証明する．

補題 1.31. Zariski sheaf $F\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ に対して，$F(\emptyset) = \{*\}$ が成り立つ．

Proof. 空スキーム $\emptyset \in \mathsf{Sch}/S$ の被覆として empty cover ($I = \emptyset$) を考えれば，$\prod_{i \in \emptyset} = \{*\}$(終対象) となり，

$$F(\emptyset) \longrightarrow \{*\} \rightrightarrows \{*\}$$

が equalizer になる．よって $F(\emptyset) = \{*\}$ となる． □

補題 1.32. S-スキーム $U_i \in \mathsf{Sch}/S$ について $V = \coprod_i U_i \in \mathsf{Sch}/S$ とおく．このとき Zariski sheaf $F\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ に対して，$F(V) \cong \prod_i F(U_i)$ が成り立つ．

Proof. 標準的な入射 $U_i \to V$ は open immersion で，$\bigcup_i U_i = V$ であるから，$\{U_i \to V\}_i$ は V の Zariski covering である．よって

$$F(V) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \times_V U_j)$$

は equalizer である．ここで $i \neq j$ のとき

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & U_j \arrow[d] \\ U_i \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

を可換にする W は，V の部分集合として $U_i \cap U_j = \emptyset$ であることから $W = \emptyset$ に限る．したがって

$$U_i \times_V U_j = \emptyset \qquad \text{for } i \neq j$$

となる．補題 1.31 より $F(\emptyset)$ は Set の終対象だから，

$$\prod_{i,j} F(U_i \times_V U_j) \cong \prod_i F(U_i \times_V U_i)$$

となる．さらに open immersion $U_i \to V$ は mono 射だから，$U_i \times_V U_i \cong U_i$ が成り立ち，

$$\prod_i F(U_i \times_V U_i) \cong \prod_i F(U_i)$$

となる．このとき

$$F(V) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \overset{\mathrm{id}}{\underset{\mathrm{id}}{\rightrightarrows}} \prod_i F(U_i)$$

が equalizer 図式になり，$F(V) \cong \prod_i F(U_i)$ を得る． □

Zariski sheaf が fpqc sheaf かどうかを調べるには一つの射からなる被覆に対して層の条件を確認すればいいことが知られている：

補題 1.33. Zariski sheaf $F\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ に対し，次は同値である．

(i) F は fpqc sheaf である．

(ii) 任意の fpqc な S-スキームの射 $f\colon V \to U$ に対して

$$F(U) \longrightarrow F(V) \overset{\mathrm{pr}_1^*}{\underset{\mathrm{pr}_2^*}{\rightrightarrows}} F(V \times_U V)$$

は equalizer である．

Proof. (i) ⇒ (ii): $f\colon V \to U$ が fpqc 射のとき，$\{V \xrightarrow{f} U\}$ は U の fpqc covering となることから従う．

(ii) ⇒ (i): U の fpqc covering $\{U_i \to U\}_i$ を任意に取る．$V = \coprod_i U_i$ とおく．F は Zariski sheaf であるから，補題 1.32 より

$$F(V) \cong \prod_i F(U_i)$$

となる．同様に，$V \times_U V \cong \coprod_{i,j} (U_i \times_U U_j)$ が成り立つことから

$$F(V \times_U V) \cong \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j)$$

となる．このとき

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r] \arrow[d, equal] & F(V) \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_1^*"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2^*"'] \arrow[d, "\cong"] & F(V \times_U V) \arrow[d, "\cong"] \\
F(U) \arrow[r] & \prod_i F(U_i) \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_1^*"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2^*"'] & \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j)
\end{tikzcd}$$

を考えると，$V = \coprod_i U_i \to U$ が fpqc 射であることから上段が equalizer 図式になるから，下段も equalizer になり F は fpqc sheaf である． $\square$

さらに強く，次が成り立つ．

定理 1.34. 反変関手 $F\colon (\mathsf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ に対して

(i) F は Zariski sheaf である

(ii) 任意のアファイン S-スキームの間の忠実平坦射 $f\colon V \to U$ に対し

$$F(U) \longrightarrow F(V) \underset{\mathrm{pr}_2^*}{\overset{\mathrm{pr}_1^*}{\rightrightarrows}} F(V \times_U V)$$

は equalizer 図式である

が成り立つとする．このとき，F は fpqc sheaf である．

Proof. 補題 1.33 より，fpqc 射 $f\colon V \to U$ に対して

$$F(U) \xrightarrow{F(f)} F(V) \underset{\mathrm{pr}_2^*}{\overset{\mathrm{pr}_1^*}{\rightrightarrows}} F(V \times_U V)$$

が equalizer であることを示せばよい．

証明をいくつかの段階に分けて考える．

<u>Step 1: ($F(f)$ は単射である)</u>

$f\colon V \to U$ は fpqc 射であるとする．命題 1.7 (iv) より，V の quasi-compact な開被覆 $\{V_i\}_i$ であって $U_i := f(V_i)$ が U のアフィン開集合となるものが存在する．さらに各 V_i は，アフィン開有限被覆 $\{V_{ik}\}$ をもつ．可換図式

$$\begin{array}{ccc} FU & \xrightarrow{F(f)} & FV \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_i FU_i & \longrightarrow & \prod_i \prod_k FV_{ik} \end{array}$$

を考える．F は Zariski sheaf であることから，左右の射は単射である．また各 i について，$\coprod_k V_{ik}$ がアフィンスキームであり $\coprod_k V_{ik} \to U_i$ が忠実平坦射となることから，(ii) より

$$FU_i \longrightarrow F(\coprod\nolimits_k V_{ik}) \cong \prod\nolimits_k F(V_{ik})$$

は単射となる．よって上の図式の下段も単射となり，$F(f)$ が単射であることがわかる．

<u>Step 2: (quasi-compact スキームからアフィンスキームへの射の場合)</u>

$f\colon V \to U$ は quasi-compact スキーム V からアフィンスキーム U への fpqc 射であるとする．$\mathrm{pr}_1^* b = \mathrm{pr}_2^* \in F(V \times_U V)$ をみたす $b \in F(V)$ に対して，$f^* a = Ff(a) = b$ となる $a \in F(U)$ が存在することを示す．

V は quasi-compact だからアフィンな有限開被覆 $\{V_i\}_i$ が存在する．このとき $\coprod_i V_i$ はアフィンスキームで $\coprod_i V_i \to U$ が忠実平坦射になるから，(ii) と補題 1.32 より

$$F(U) \longrightarrow \prod_i F(V_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(V_i \times_U V_j)$$

は equalizer になる．$b_i = b|_{V_i} \in F(V_i)$ とおくと，i, j に対して

$$b_i|_{V_i \times_U V_j} = (\mathrm{pr}_1^* b)|_{V_i \times_U V_j} = (\mathrm{pr}_2^* b)|_{V_i \times_U V_j} = b_j|_{V_i \times_U V_j}$$

$$\begin{tikzcd}
V_i \times_U V_j \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd] & & V_j \arrow[d, hook] \\
& V \times_U V \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & V \arrow[d, "f"] \\
V_i \arrow[r, hook] & V \arrow[r, "f"'] & U
\end{tikzcd}$$

となるから，$f^*a|_{V_i} = b_i = b|_{V_i}$ となる $a \in F(U)$ が一意に存在する．F は Zariski sheaf であることから，$f^*a = b$ を得る．

Step 3: (一般のスキームからアフィンスキームへの射の場合)

$f \colon V \to U$ は一般のスキーム V からアフィンスキーム U への fpqc 射であるとする．$\mathrm{pr}_1^* b = \mathrm{pr}_2^* \in F(V \times_U V)$ をみたす $b \in F(V)$ に対して，$f^*a = Ff(a) = b$ となる $a \in F(U)$ が存在することを示す．

まず，V の quasi-compact な開被覆 $\{V_i\}_i$ であって $f|_{V_i} : V_i \to U$ が全射になるものが存在する．

$\because$) f は fpqc 射だから命題 1.7 (i) より，$f(W) = U$ なる quasi-compact な開集合 $W \subseteq V$ が存在する．各 $x \in V$ について，命題 1.7 (iv) より，x の quasi-compact な開近傍 W_x が存在して $f(W_x) \subseteq U$ はアフィン開集合になる．このとき $V_x = W_x \cup W$ とおくと，これは x の quasi-compact な開近傍で $f|_{V_x} : V_x \to U$ は全射となる．よって開被覆 $\{V_x\}_{x \in V}$ をとればよい．

$b_i = b|_{V_i} \in F(V_i)$ とおく．$f|_{V_i} : V_i \to U$ は quasi-compact スキームからアフィンスキームへの fpqc 射だから，Step 2 より

$$\exists!\, a_i \in F(U), \quad (f^*a_i)|_{V_i} = b_i$$

となる．ここで任意の i, j に対して $a_i = a_j$ が成り立つ．

$\because$) $V_i \cup V_j$ は quasi-compact 開集合で $\mathrm{res}\, f \colon V_i \cup V_j \to U$ は fpqc 射だから，Step 2 より $(f^*a_{ij})|_{V_i \cup V_j} = b|_{V_i \cup V_j}$ なる $a_{ij} \in F(U)$ が存在する．このとき

$$(f^*a_{ij})|_{V_i} = b|_{V_i} = b_i = (f^*a_i)|_{V_i}$$

となり，$V_i \to U$ が fpqc 射であることから Step 1 より $a_{ij} = a_i$ となる．同様に $a_{ij} = a_j$ もわかる．

よって $a \coloneqq a_i \in F(U)$ が well-defined に定まる．さらに各 i について $(f^*a)|_{V_i} = b_i\ b|_{V_i}$ となるから，F が Zariski sheaf であることより $f^*a = b$ を得る．

Step 4: (一般の射の場合)

$f\colon V \to U$ はスキームの間の fpqc 射であるとする．U のアフィン開被覆 $\{U_i\}_i$ をとり，$V_i = f^{-1}(U_i)$ とおく．図式

$$\begin{tikzcd}
 & F(U) \arrow[r] \arrow[d] & F(V) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & F(V \times_U V) \arrow[d] \\
 & \prod_i F(U_i) \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \prod_i F(V_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \prod_{i,j} F(V_i \times_U V_j) \\
 & \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j) \arrow[r, "\gamma"] & \prod_{i,j} F(V_i \cap V_j) &
\end{tikzcd}$$

において

- F は Zariski sheaf だから，左二列は equalizer
- Step 3 より中段も equalizer
- Step 1 より γ は単射

であるから，diagram chasing によって上段が equalizer であることがわかる． $\square$

命題 1.35. 忠実平坦な環準同型 $\phi\colon A \to B$ に対して，pushout

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "e_1"] \\
B \arrow[r, "e_2"'] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & B \otimes_A B
\end{tikzcd}$$

をとるとき，任意の A-加群 M に対して

$$M \cong M \otimes_A A \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f} M \otimes_A B \overset{\mathrm{id} \otimes e_1}{\underset{\mathrm{id} \otimes e_2}{\rightrightarrows}} M \otimes_A (B \otimes_A B)$$

は equalizer 図式である．

Proof. B は A 上忠実平坦だから，上の図式に B をテンソルした図式

$$M \otimes_A B \xrightarrow{e} M \otimes_A (B \otimes_A B) \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} M \otimes_A (B \otimes_A B \otimes_A B)$$

が equalizer であることを示せばよい．ここで

$$\begin{aligned} e &\colon m \otimes b \mapsto m \otimes (1 \otimes b) \\ p_1 &\colon m \otimes (b_1 \otimes b_2) \mapsto m \otimes (b_1 \otimes 1 \otimes b_2) \\ p_2 &\colon m \otimes (b_1 \otimes b_2) \mapsto m \otimes (1 \otimes b_1 \otimes b_2) \end{aligned}$$

である．準同型

$$r \colon M \otimes_A (B \otimes_A B) \longrightarrow M \otimes_A B \,; \quad m \otimes b_1 \otimes b_2 \mapsto m \otimes (b_1 b_2)$$

を考えれば $r \circ e = \mathrm{id}$ となるから，e は単射である．また，$p_1(x) = p_2(x)$ なる $x \in M \otimes_A (B \otimes_A B)$ をとるとき，準同型

$$t \colon M \otimes_A (B \otimes_A B \otimes_A B) \longrightarrow M \otimes_A (B \otimes_A B) \,; \quad m \otimes b_1 \otimes b_2 \otimes b_3 \mapsto m \otimes b_1 \otimes (b_2 b_3)$$

を考えると

$$t \circ p_1 = \mathrm{id}, \quad t \circ p_2 = e \circ r$$

が成り立つから

$$x = t(p_1(x)) = t(p_2(x)) = e(r(x))$$

となる．よって上の図式は equalizer である． □

> **補題 1.36.** スキームの射 $f_1 \colon X_1 \to Y$，$f_2 \colon X_2 \to Y$ と $x_1 \in X_1$，$x_2 \in X_2$ について，$f_1(x_1) = f_2(x_2)$ であるとする．このとき，$\mathrm{pr}_1(z) = x_1, \mathrm{pr}_2(z) = x_2$ となる $z \in X_1 \times_Y X_2$ が存在する．

Proof. $y = f_1(x_1) = f_2(x_2)$ とおく．f から誘導される剰余体の間の単射 $\kappa(y) \to \kappa(x_i)$ によって得られる体拡大 $\kappa(x_i)/\kappa(y)$ を考えると，$\kappa(x_1) \otimes_{\kappa(y)} \kappa(x_2) \neq 0$ である．よってこの環は極大イデアルを持ちその剰余体を K とすれば，K は $\kappa(x_1), \kappa(x_2)$ を含むような $\kappa(y)$ の拡大体となる．このとき

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} \kappa(x_2) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\operatorname{Spec} \kappa(x_1) \arrow[r] \arrow[dr] & \operatorname{Spec} \kappa(y) \arrow[dr] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\
& X_1 \arrow[r, "f_1"'] & Y
\end{tikzcd}$$

は可換だから

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X_1 \times_Y X_2 \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\
& X_1 \arrow[r, "f_1"'] & Y
\end{tikzcd}$$

なる $\operatorname{Spec} K \to X_1 \times_Y X_2$ が得られる．この射の像を $z \in X_1 \times_Y X_2$ とすれば，$\mathrm{pr}_1(z) = x_1, \mathrm{pr}_2(z) = x_2$ が成り立つ． □

以上の準備のもと，定理 1.30 を証明しよう．

Proof of Theorem 1.30. fpqc site Sch/S が subcanonical であることを示すには，命題 1.29 より fpqc site Sch が subcanonical であることを示せばよい．さらに $X \in \mathsf{Sch}$ に対して，$h_X \colon \mathsf{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ は命題 1.27 より Zariski sheaf だから，定理 1.34 よりアフィンスキームの間の忠実平坦射 $f \colon V \to U$ に対して

$$\operatorname{Hom}(U,X) \longrightarrow \operatorname{Hom}(V,X) \rightrightarrows \operatorname{Hom}(V \times_U V, X)$$

が equalizer であることを示せばよい．

X がアフィンスキームの場合，$U = \operatorname{Spec} A, V = \operatorname{Spec} B, X = \operatorname{Spec} R$ とおくと，命題 1.35 より

$$A \longrightarrow B \rightrightarrows B \otimes_A B$$

は equalizer である．表現可能関手 $\operatorname{Hom}(R,-)$ は limit を保つことから

$$\operatorname{Hom}(R,A) \longrightarrow \operatorname{Hom}(R,B) \rightrightarrows \operatorname{Hom}(R, B \times_A B)$$

も equalizer で，同型 $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Ring}}(R,A) \cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{Sch}}(U,X)$ を用いることで主張を得る．

X が一般のスキームの場合，$\{X_i\}_i$ をを X のアフィン開被覆とする．まず h_X が separated であることを示そう．$g, g' \colon U \to X$ について，$g \circ f = g' \circ f$ であるとする．f は全射だから，底空間の間の写像として $|g| = |g'|$ が成り立つ．$U_i = g^{-1}(X_i) = {g'}^{-1}(X_i)$，$V_i = f^{-1}(U_i)$ とおくと，それぞれ U, V の開集合である．このとき fpqc 射 $f|_{V_i} : V_i \to U_i$ に対し

$$g|_{U_i} \circ f|_{V_i} = g'|_{U_i} \circ f|_{V_i} : V_i \to X_i$$

が成り立つから，アフィンスキーム X_i の表現する関手 h_{X_i} が fpqc sheaf であることより，$g|_{U_i} = g'|_{U_i} : U_i \to X_i \hookrightarrow X$ となる．h_X は Zariski sheaf だからスキームの射として $g = g'$ を得る．

さて $g\colon V \to X$ が $g \circ \mathrm{pr}_1 = g \circ \mathrm{pr}_2$ をみたすとする．f の全射性と命題 1.9 (vi) より，g は底空間の間の連続写像として

$$\begin{tikzcd} {|V \times_U V|} \arrow[r, shift left, "|\mathrm{pr}_1|"] \arrow[r, shift right, "|\mathrm{pr}_2|"'] & {|V|} \arrow[r, "|g|"] \arrow[d, "|f|"'] & {|X|} \\ & {|U|} \arrow[ur, dashed, "c"'] & \end{tikzcd}$$

と分解する．

> ∵) $x \in |U|$ に対し，$f(y) = x$ なる $y \in |V|$ があるから，このとき $c(x) := g(y)$ と定める．もし $y' \in |V|$ も $f(y') = x$ をみたすとすると，補題 1.36 より $\mathrm{pr}_1(z) = y, \mathrm{pr}_2(z) = y'$ となる $z \in |V \times_U V|$ が存在する．よって $g(y) = g(\mathrm{pr}_1(z)) = g(\mathrm{pr}_2(z)) = g(y')$ となり，$c(x)$ は well-defined に定まる．
> 　こうして写像 $c\colon |U| \to |X|$ が得られるが，命題 1.9 (vi) より U の位相は全射 f によって誘導される位相に一致し，c は連続写像になる．

$U_i = c^{-1}(X_i), V_i = f^{-1}(U_i) = g^{-1}(X_i)$ とおけば

$$g|_{V_i} \circ \mathrm{pr}_1 = g|_{\mathrm{pr}_2} \circ \mathrm{pr}_2 \colon V_i \times_{U_i} V_i \cong V_i \times_U V_i \to V_i \to X_i$$

であり，アフィンスキーム X_i の表現する関手 h_{X_i} が fpqc sheaf であることから，

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[rr, "g|_{V_i}"] \arrow[dr, "f|_{V_i}"'] & & X_i \\ & U_i \arrow[ur, dashed, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする $g_i\colon U_i \to X_i$ が一意的に存在する．i, j に対して，図式

$$\begin{tikzcd} V_i \cap V_j \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{res}\, f"'] \arrow[rrr, bend left, "g|_{U_i \cap U_j}"] & V_i \arrow[r, "g|_{V_i}"] \arrow[d] & X_i \arrow[r, hook] & X \\ U_i \cap U_j \arrow[r, hook] & U_i \arrow[ur, "g_i"'] & & \end{tikzcd}$$

は可換だから，h_X が separated より

$$g_i|_{U_i \cap U_j} = g_j|_{U_i \cap U_j} \colon U_i \cap U_j \longrightarrow X$$

となる．さらに h_X は Zariski sheaf より，$g'|_{U_i} = g_i$ となる $g'\colon U \to X$ が存在する．このとき

$$g|_{V_i} = g_i \circ f|_{V_i} = g'|_{U_i} \circ f|_{V_i} = (g' \circ f)|_{V_i}$$

となるから，再び h_X が Zariski sheaf であることより $g = g' \circ f$ となる．したがって h_X は fpqc sheaf であることが示せた． □

2　ファイバー圏

2.1　導入：集合族

集合 I で添え字づけられた**集合族** (*family of sets*) とは，各 $i \in I$ に対して集合 X_i が与えられているデータのことである．これは $X(i) = X_i$ となる関手 $X\colon I \to \mathsf{Set}$ を与えていると見なしてよい．つまり集合族とは，関手圏 $[I, \mathsf{Set}]$ の対象のことである．

一方で，集合族は別の見方で捉えることもできる．実体として全集合 $\coprod_i X_i$ があり，その**成分** (*component*) が集合 I の元で分類されているとする見方である．この場合，$X_i = X^{-1}(i)$ となる写像 $X\colon \coprod_i X_i \to I$ を与えていると解釈でき，集合族とはスライス圏 Set/I の対象のことであるといえる．

こうした二つの見方は，次の意味で等価である：

命題 2.1. 集合 I に対して，圏同値

$$[I, \mathsf{Set}] \simeq \mathsf{Set}/I$$

が存在する．

Proof. 関手 $F\colon I \to \mathsf{Set}$ に対して，自然な射影 $\coprod_i F(i) \to I$ を対応させる関手が圏同値を与える．逆射は，射 $p\colon X \to I$ に対して関手 $i \mapsto p^{-1}(i)$ を与える対応である． □

集合族のこうした視点の等価性は “圏の族” に対しても成り立ち，ファイバー圏とは，スライス圏 $\mathsf{Cat}/\mathscr{C}$ の対象として “圏の族” を表現しているような圏概念のことである．

2.2　ファイバー圏

定義 2.2. $\mathscr{C}$ を圏とする．

(i) **$\mathscr{C}$ 上の圏** (*category over* $\mathscr{C}$) とは，圏 $\mathscr{F}$ と関手 $p_{\mathscr{F}}\colon \mathscr{F} \to \mathscr{C}$ の組 $(\mathscr{F}, p_{\mathscr{F}})$ のことをいう．$p = p_{\mathscr{F}}$ のことを $\mathscr{C}$ 上の圏であるといったり，関手を省略して単に $\mathscr{F}$ が $\mathscr{C}$ 上の圏であるといったりする．

(ii) $\mathscr{C}$ 上の圏 $(\mathscr{F}, p_{\mathscr{F}}), (\mathscr{G}, p_{\mathscr{G}})$ に対して，$(\mathscr{F}, p_{\mathscr{F}})$ から $(\mathscr{G}, p_{\mathscr{G}})$ への **$\mathscr{C}$ 上の関手** (*functor over* $\mathscr{C}$) とは，関手 $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ であって

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p_{\mathscr{F}}"'] & & \mathscr{G} \arrow[dl, "p_{\mathscr{G}}"] \\ & \mathscr{C} & \end{tikzcd}$$

を可換にするもののこと．

(iii) $\mathscr{C}$ 上の圏の間の $\mathscr{C}$ 上の関手 $F, G\colon (\mathscr{F}, p_{\mathscr{F}}) \to (\mathscr{G}, p_{\mathscr{G}})$ に対して，自然変換 $\alpha\colon F \to G$ が *base-preserving* であるとは，すべての $u \in \mathscr{F}$ に対して $p_{\mathscr{G}}(\alpha_u) = \mathrm{id}_{p_{\mathscr{F}}(u)}$ をみたすときをいう．

圏 $\mathscr{C}$ に対して，$\mathscr{C}$ 上の圏と $\mathscr{C}$ 上の関手，およびその間の base-preserving な自然変換は 2-圏をなす．これはちょうど 2-圏 Cat の**スライス 2-圏** (*slice 2-category*) Cat/$\mathscr{C}$ のことである．

定義 2.3. $\mathscr{C}$ を圏とし，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{C}$ 上の圏とする．$\mathscr{C}$ の対象 U に対して，$\mathscr{F}$ の部分圏 $\mathscr{F}(U)$ を

- 対象は，$p_{\mathscr{F}}(u) = U$ となる $\mathscr{F}$ の対象 $u \in \mathscr{F}$ とする
- 射 $u \to v$ は，$p_{\mathscr{F}}(\phi) = \mathrm{id}_U$ となる $\mathscr{F}$ の射 $\phi\colon u \to v$ とする

によって定める．この圏 $\mathscr{F}(U)$ を，$\mathscr{F}$ の U 上の**ファイバー** (*fiber*) という．

$\mathscr{C}$ 上の関手 $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ があるとき，各 $U \in \mathscr{C}$ に対して F は U 上のファイバーの間の関手

$$F_U\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$$

を誘導する．

しかし，対応 $U \mapsto \mathscr{F}(U)$ は一般に関手的ではなく，$U \cong V$ であっても $\mathscr{F}(U) \not\cong \mathscr{F}(V)$ となりうる．この対応がある意味で関手的になるような $\mathscr{C}$ 上の圏が，ファイバー圏という概念である．

定義 2.4. $\mathscr{C}$ 上の圏 $\mathscr{F}$ の射 $\phi\colon u \to v$ に対して，ϕ が *cartesian* であるとは，次の普遍性をみたすときをいう：

- 任意の $\mathscr{F}$ の射 $\psi\colon w \to v$ と $p(\phi) \circ h = p(\psi)$ なる $\mathscr{C}$ の射 $h\colon p(w) \to p(v)$ に対して，$\mathscr{F}$ の射 $\theta\colon w \to u$ が一意的に存在して，$p(\theta) = h$ かつ $\phi \circ \theta = \psi$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[dr, dashed, "\exists!\,\theta"'] \arrow[drr, bend left, "\forall\,\psi"] \arrow[dd, mapsto] & & \\
& u \arrow[r, "\phi"] \arrow[dd, mapsto] & v \arrow[dd, mapsto] \\
W \arrow[dr, "\forall\,h"'] \arrow[drr, bend left] & & \\
& U \arrow[r] & V
\end{tikzcd}$$

射 $\phi\colon u \to v$ が cartesian で，$U = p(u), V = p(v)$ であるとき，u は v の U への *pullback* であるという．cartesian な射 ϕ のことを pullback ともいう．

注意 2.5. 普遍性から，pullback は up to unique iso. で一意的である．つまり $\phi\colon u \to v$ と

$\phi' \colon u' \to v$ が v の U への pullback であるとき，

$$
\begin{tikzcd}
u' \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "\phi'"] \arrow[dd, mapsto] & & \\
& u \arrow[r, "\phi"] \arrow[dd, mapsto] & v \arrow[dd, mapsto] \\
U \arrow[dr, equal] \arrow[drr, bend left] & & \\
& U \arrow[r] & V
\end{tikzcd}
$$

によって一意的に得られる射 $\theta \colon u' \to u$ は，普遍性により同型になる．

命題 2.6. $(\mathscr{F}, p_{\mathscr{F}})$ を $\mathscr{C}$ 上の圏とする．

(i) 同型射は cartesian である．

(ii) $\mathscr{F}$ において，cartesian な射の合成はまた cartesian である．

(iii) $\mathscr{F}$ の射 $\phi \colon u \to v, \psi \colon v \to w$ において ψ が cartesian であるとき，

$$\phi \text{ は cartesian} \iff \psi \circ \phi \text{ は cartesian.}$$

(iv) $\mathscr{F}$ の射 $\phi \colon u \to v$ に対して $p_{\mathscr{F}}(\phi)$ が $\mathscr{C}$ の同型射になるとき，

$$\phi \text{ は cartesian} \iff \phi \text{ は同型.}$$

(v) 別な $\mathscr{C}$ 上の圏 $(\mathscr{G}, p_{\mathscr{G}})$ と $\mathscr{C}$ 上の関手 $F \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ があるとき，$\mathscr{F}$ の射 $\phi \colon u \to v$ に対して，ϕ が $\mathscr{G}$ 上で cartesian かつ $F(\phi)$ が $\mathscr{C}$ 上で cartesian ならば，ϕ は $\mathscr{C}$ 上でも cartesian である．

Proof. ほとんど明らかである． □

定義 2.7. $\mathscr{C}$ を圏とする．$\mathscr{C}$ 上の**ファイバー圏** (*fibered category over* $\mathscr{C}$) とは，$\mathscr{C}$ 上の圏 $(\mathscr{F}, p = p_{\mathscr{F}})$ であって

- 任意の $\mathscr{C}$ の射 $f \colon U \to V$ と $\mathscr{F}$ の対象 $v \in \mathscr{F}(V)$ に対して，$\mathscr{F}$ の cartesian 射 $\phi \colon u \to v$ が存在して $p(\phi) = f$ となる

をみたすときをいう．*Grothendieck fibration* または単に *fibration* とも呼ばれる．

言い換えれば，ファイバー圏とは，$\mathscr{F}$ の対象を $\mathscr{C}$ の射に沿って pullback できるような $\mathscr{C}$ 上の圏のことである．

次の補題は便利である．

補題 2.8. $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $(\mathscr{F}, p)$ において，任意の $\mathscr{F}$ の射 $\psi\colon w \to v$ は分解

$$\begin{tikzcd} w \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & v \\ & u \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

であって

- ϕ は cartesian である
- λ は $\mathscr{F}(p(w))$ の射である，つまり $p(w) = p(u)$ かつ $p(\lambda) = \mathrm{id}_{p(w)}$ が成り立つ

をみたすものを持つ．

Proof. ファイバー圏の定義より，$\mathscr{C}$ の射 $p(\psi)\colon p(w) \to p(v)$ と対象 $v \in \mathscr{F}(p(v))$ に対して，$p(\phi) = p(\psi)$ となる cartesian 射 $\phi\colon u \to v$ が存在する．このとき，cartesian 射の普遍性より，

$$\begin{tikzcd} w \arrow[dr, dashed, "\lambda"'] \arrow[rr, bend left, "\psi"] & & \\ & u \arrow[r, "\phi"] & v \arrow[d, mapsto] \\ p(w) \arrow[dr, "\mathrm{id}_{p(w)}"'] \arrow[rr, bend left, "p(\psi)"] & & \\ & p(u) \arrow[r, "p(\phi)"'] & p(v) \end{tikzcd}$$

となる λ が存在する．これが所望の分解である． □

ファイバー圏の間の射を定義する．

定義 2.9. $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ を $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏とする．$\mathscr{C}$ 上の関手 $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ が**ファイバー圏の射** (*morphism of fibered categories*)(または *cartesian functor*) であるとは，F が $\mathscr{F}$ の cartesian 射を $\mathscr{G}$ の cartesian 射に移すときをいう．

$\mathscr{C}$ 上のファイバー圏とその間の cartesian functor と base-preserving な自然変換のなす 2-圏を $\mathsf{Fib}(\mathscr{C})$ とする．これは $\mathsf{Cat}/\mathscr{C}$ の 2-部分圏である．

命題 2.10. 関手 $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{G} \xrightarrow{q} \mathscr{C}$ があるとき，$(\mathscr{F}, p)$ が $\mathscr{G}$ 上のファイバー圏で $(\mathscr{G}, q)$ が $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏ならば，$(\mathscr{F}, q \circ p)$ は $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏になる．

Proof. 命題 2.6 (v) より従う． □

2.3 Pseudo-functor と Grothendieck 構成

圏 $\mathscr{C}$ 上の圏 $\mathscr{F}$ に対して, $\mathscr{F}$ がファイバー圏のときは, 対応 $U \mapsto \mathscr{F}(U)$ が関手的なふるまいをする．しかし得られるのは通常の意味での関手ではなく，それよりも弱い概念である pseudo-functor になる．

定義 2.11. 圏 $\mathscr{C}$ 上の *pseudo-functor* Φ とは，次のようなデータ

- $U \in \mathscr{C}$ に対して，圏 $\Phi(U)$ が対応している
- $\mathscr{C}$ の射 $f \colon U \to V$ に対して，関手 $\Phi(f) = f^* \colon \Phi(V) \to \Phi(U)$ が対応している
- $U \in \mathscr{C}$ に対して，自然同型

$$\varepsilon_U \colon \mathrm{id}_U^* \overset{\cong}{\Longrightarrow} \mathrm{id}_{\Phi(U)} : \Phi(U) \to \Phi(U)$$

  が与えられている
- $\mathscr{C}$ の射 $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ に対して，自然同型

$$\alpha_{f,g} \colon f^* g^* \overset{\cong}{\Longrightarrow} (gf)^* : \Phi(W) \to \Phi(U)$$

  が与えられている

の組 $\Phi = (\Phi, \varepsilon, \alpha)$ であって,

(PF1) 任意の $\mathscr{C}$ の射 $f \colon U \to V$ と $v \in \Phi(V)$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathrm{id}_U, f}(v) &= \epsilon_U(f^* v) \colon \mathrm{id}_U^*(f^* v) \longrightarrow f^* v \\ \alpha_{f, \mathrm{id}_V}(v) &= f^*(\epsilon_V(v)) \colon f^*(\mathrm{id}_V^* v) \longrightarrow f^* v \end{aligned}$$

が成り立つ

(PF2) 任意の $\mathscr{C}$ の射 $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} T$ と $t \in \Phi(T)$ に対して

$$\begin{tikzcd} f^* g^* h^* t \arrow[r, "\alpha_{f,g}(h^* t)"] \arrow[d, "f^* \alpha_{g,h}(t)"'] & (gf)^* h^* t \arrow[d, "\alpha_{gf,h}(t)"] \\ f^*(hg)^* t \arrow[r, "\alpha_{f,hg}(t)"'] & (hgf)^* t \end{tikzcd}$$

が可換である

をみたすもののこと．より簡潔に言えば，圏 $\mathscr{C}$ から 2-圏 Cat への反変な pseudo-functor (または weak 2-functor) のこと．$\mathscr{C}$*-indexed category* とも呼ばれる．

例. 通常の関手 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Cat}$ は自然に pseudo-functor になる．

$\mathscr{C}$ の射 $f\colon U \to V$ に対して，関手 $\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ をファイバー圏の対象の pullback によって定義したい．しかしファイバー圏の定義では，pullback が存在することしか主張しておらず，取り方に標準的な方法はない．そこで，pullback の選び方をデータとしてあらかじめ与えておくことを考える．

定義 2.12. $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{F}$ の *cleavage* とは，$\mathscr{F}$ の cartesian な射から成る集まり $K \subseteq \mathrm{mor}(\mathscr{F})$ であって，

- 任意の $\mathscr{C}$ の射 $f\colon U \to V$ と $\mathscr{F}$ の対象 $v \in \mathscr{F}(V)$ に対して，K に属する cartesian 射 $k\colon u \to v$ が一意的に存在して $p(k) = f$ となる

をみたすもののことをいう．$\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathscr{F}$ に cleavage が与えられているとき，$\mathscr{F}$ は *cloven* であるという．

すべてのファイバー圏は選択公理によって cleavage をもつことに注意する．

以下，すべてのファイバー圏 $\mathscr{F}$ には cleavage K が一つ与えれているとし，$\mathscr{C}$ の射 $f\colon U \to V$ と $\mathscr{F}$ の対象 $v \in \mathscr{F}(V)$ に対して，K に属する v の U への pullback を

$$\kappa_f = \kappa_{f,v}\colon f^*v \longrightarrow v$$

と表すことにする．

命題 2.13. $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathscr{F}$ とその cleavage K に対して，$\mathscr{C}$ 上の pseudo-functor $\Sigma(\mathscr{F})$ が定まる．

Proof. $\Sigma(\mathscr{F})$ を次のようなデータの組とする：

- $U \in \mathscr{C}$ に対して，$\Sigma(\mathscr{F})(U) = \mathscr{F}(U)$ とする．
- $\mathscr{C}$ の射 $f\colon U \to V$ に対して，関手 $\Sigma(\mathscr{F})(f)\colon \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ を
  - $v \in \mathscr{F}(V)$ に対して $\Sigma(\mathscr{F})(f)(v) = f^*v = \mathrm{dom}(\kappa_f) \in \mathscr{F}(U)$ とする
  - $\mathscr{F}(V)$ の射 $\phi\colon v \to v'$ に対して

$$\begin{tikzcd}
f^*v \arrow[r, "\kappa_f"] \arrow[dr, dashed, "f^*\phi"'] & v \arrow[dr, "\phi"] & \\
& f^*v' \arrow[r, "\kappa_f"'] & v' \\
U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, equal] & V \arrow[dr, equal] & \downarrow \\
& U \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}$$

    なる $f^*\phi$ をとって $\Sigma(\mathscr{F})(f)(\phi) = f^*\phi$ とする

  によって定める．

- $U \in \mathscr{C}$ と $u \in \mathscr{F}(U)$ に対して，$\varepsilon_U(u) = \kappa_{\mathrm{id}_U} \colon \mathrm{id}_U^* u \to u$ を考えると，$p(\kappa_{\mathrm{id}_U}) = \mathrm{id}_U$ は同型射だから命題 2.6 (iv) より，$\varepsilon_U(u)$ は $\mathscr{F}(U)$ の同型射．これは $u \in \mathscr{F}(U)$ について自然で自然同型

  $$\varepsilon_U \colon \mathrm{id}_U^* \overset{\cong}{\Longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathscr{F}(U)}$$

  を定める．
- $\mathscr{C}$ の射 $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ と $w \in \mathscr{F}(W)$ に対して，

  $$\begin{tikzcd}[row sep=small]
  f^*g^*w \arrow[r, "\kappa_f"] \arrow[dr, dashed, "\alpha_{f,g}(w)"'] & g^*w \arrow[dr, "\kappa_g"] & \\
  & (gf)^*w \arrow[r, "\kappa_{gf}"'] & w \\
  & & \mapsdown \\
  U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, equal] & V \arrow[dr, "g"] & \\
  & U \arrow[r, "gf"'] & W
  \end{tikzcd}$$

  なる $\alpha_{f,g}(w) \colon f^*g^*w \to (gf)^*w$ をとると，命題 2.6 (iv) より，$\alpha_{f,g}(w)$ は $\mathscr{F}(U)$ の同型射．これは $w \in \mathscr{F}(W)$ について自然で自然変換

  $$\alpha_{f,g} \colon f^*g^* \overset{\cong}{\Longrightarrow} (gf)^*$$

  が定まる．

このとき $\Sigma(\mathscr{F})$ は (PF1) をみたす：

(PF1) $\mathscr{C}$ の射 $f \colon U \to V$ と $v \in \mathscr{F}(V)$ をとる．$\mathrm{id}_U^* f^*v \to f^*v \to v$ に対して pullback $\kappa_f \colon f^*v \to v$ の普遍性より

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\mathrm{id}_U^* f^*v \arrow[drr, bend left] \arrow[dr, dashed, "\exists!"'] & & \\
& f^*v \arrow[r, "\kappa_f"'] & v \\
& & \mapsdown \\
U \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, equal] & & \\
& U \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}$$

となる．$\alpha_{\mathrm{id}_U, f}(v)$ も $\varepsilon_U(f^*v)$ もこの一意性をみたす射であるから

$$\alpha_{\mathrm{id}_U, f}(v) = \varepsilon_U(f^*v)$$

となる．同様にして $\alpha_{f, \mathrm{id}_V}(v) = f^*\varepsilon_V(v)$ もわかる．

(PF2) をみたすことも同様で，したがって $\Sigma(\mathscr{F})$ は $\mathscr{C}$ 上の pseudo-functor になる． □

逆に pseudo-functor に対して，ファイバー圏が定まる．

命題 2.14. $\mathscr{C}$ 上の pseudo-functor Φ に対して，$\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\int \Phi$ が定まる．

Proof. 圏 $\int \Phi$ を

- $\int \Phi$ の対象は，$U \in \mathscr{C}$ と $u \in \Phi(U)$ の組 (U, u) とする
- $\int \Phi$ の射 $(U, u) \to (V, v)$ は，
  - $\mathscr{C}$ の射 $f \colon U \to V$
  - $\Phi(U)$ の射 $a \colon u \to \Phi(f)(v) = f^* v$

  の組 (f, a) とする
- $\int \Phi$ の射の合成は，

$$(f, a) \colon (U, u) \longrightarrow (V, v), \quad (g, b) \colon (V, v) \longrightarrow (W, w)$$

  に対して
  - $g \circ f \colon U \to V \to W$
  - $b \cdot a \coloneqq \alpha_{f,g}(w) \circ f^* b \circ a \colon u \xrightarrow{a} f^* v \xrightarrow{f^* b} f^* g^* w \xrightarrow{\alpha_{f,g}(w)} (gf)^* w$

  の組 $(g \circ f, b \cdot a)$ を対応させる
- $\int \Phi$ の恒等射は，

$$\mathrm{id}_{(U,u)} = (\mathrm{id}_U, \varepsilon_U(u)^{-1}) \colon (U, u) \longrightarrow (U, u)$$

  とする．

によって定める．

(結合律): $\int \Phi$ の射 $(U, u) \xrightarrow{(f,a)} (V, v) \xrightarrow{(g,b)} (W, w) \xrightarrow{(h,c)} (Z, z)$ に対して

$$\begin{aligned} (h, c) \circ ((g, b) \circ (f, a)) &= (hgf, c \cdot (b \cdot a)) \\ ((h, c) \circ (g, b)) \circ (f, a) &= (hgf, (c \cdot b) \cdot a) \end{aligned}$$

が等しいことを示す．定義より

$$\begin{aligned} c \cdot (b \cdot a) &= \alpha_{gf,h}(z) \circ (gf)^* c \circ (b \cdot a) \\ &= \alpha_{gf,h}(z) \circ (gf)^* c \circ \alpha_{f,g}(w) \circ f^* b \circ a \\ (c \cdot b) \cdot a &= \alpha_{f,hg}(z) \circ f^*(c \cdot b) \circ a \\ &= \alpha_{f,hg}(z) \circ f^* \alpha_{g,h}(z) \circ f^* g^* c \circ f^* b \circ a \end{aligned}$$

であり，$\alpha_{f,g}$ の自然性と (PF2) より

$$\begin{tikzcd} f^* g^* w \arrow[r, "f^* g^* c"] \arrow[d, "\alpha_{f,g}(w)"'] & f^* g^* h^* z \arrow[r, "f^* \alpha_{g,h}(z)"] \arrow[d, "\alpha_{f,g}(h^* z)"'] & f^*(hg)^* z \arrow[d, "\alpha_{f,hg}(z)"] \\ (gf)^* w \arrow[r, "(gf)^* c"'] & (gf)^* h^* z \arrow[r, "\alpha_{gf,h}(z)"'] & (hgf)^* z \end{tikzcd}$$

は可換であるから

$$c \cdot (b \cdot a) = (c \cdot b) \cdot a$$

となる．よって結合律が成り立つ．

(恒等律): $\int \Phi$ の射 $(f,a)\colon (U,u) \to (V,v)$ に対して

$$(f,a) \circ \mathrm{id}_{(U,u)} = (f,a) \circ (\mathrm{id}_U, \varepsilon_U(u)^{-1}) = (f, a \cdot \varepsilon_U(u)^{-1})$$

であり，(PF1) と ε_U の自然性より

$$\begin{aligned} a \cdot \varepsilon_U(u)^{-1} &= \alpha_{\mathrm{id}_U,f}(v) \circ \mathrm{id}_U^* \, a \circ \varepsilon_U(u)^{-1} \\ \varepsilon_U(f^*v) \circ \mathrm{id}_U^* \, a \circ \varepsilon_U(u)^{-1} & \\ &= a \circ \varepsilon_U(u) \circ \varepsilon_U(u)^{-1} = a \end{aligned}$$

であるから

$$(f,a) \circ \mathrm{id}_{(U,u)} = (f,a)$$

となる．同様に $\mathrm{id}_{(V,v)} \circ (f,a) = (f,a)$ もわかり，恒等律が成り立つ．

よって $\int \Phi$ はたしかに圏をなす．関手

$$p\colon \int \Phi \longrightarrow \mathscr{C} : (U,u) \mapsto U$$

によって $\mathscr{C}$ 上の圏と思う．

$\int \Phi$ がファイバー圏であることを示そう．$\mathscr{C}$ の射 $f\colon U \to V$ と $(V,v) \in \int \Phi$ をとる．このとき

$$(f, \mathrm{id}_{f^*v})\colon (U, f^*v) \longrightarrow (V,v)$$

が cartesian 射であることを確認すれば十分．

$$\begin{tikzcd}
(W,w) \arrow[rrd, bend left, "{(g,b)}"] & & \\
& (U,f^*v) \arrow[r, "{(f,\mathrm{id}_{f^*v})}"'] & (V,v) \arrow[d, mapsto] \\
W \arrow[rd, "h"'] \arrow[rrd, bend left, "g"] & & \\
& U \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}$$

なる (g,b) と h を任意に取るとき，$\int \Phi$ の射 $(h, \alpha_{h,f}(v)^{-1} \circ b)\colon (W,w) \longrightarrow (U, f^*v)$ を考えれば

$$\begin{aligned} (f, \mathrm{id}_{f^*v}) \circ (h, \alpha_{h,f}(v)^{-1} \circ b) &= (fh, \alpha_{h,f}(v) \circ h^*(\mathrm{id}_{f^*v}) \circ \alpha_{h,f}(v)^{-1} \circ b) \\ &= (fh, \alpha_{h,f}(v) \circ \mathrm{id}_{h^*f^*v} \circ \alpha_{h,f}(v)^{-1} \circ b) \\ &= (g,b) \end{aligned}$$

となる．一意性も明らかで，よって (f, id_{f^*v}) は cartesian 射である．したがって $\int \Phi$ は $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏になる． $\square$

命題 2.15. 命題 2.13 と命題 2.14 で構成した対応 $\mathscr{F} \mapsto \Sigma(\mathscr{F})$, $\Phi \mapsto \int \Phi$ は (up to iso. で) 互いに逆を与える．

Proof. 面倒だができる． $\square$

注意 2.16. 対応 $\Phi \mapsto \int \Phi$ は，$\mathscr{C}$ 上の pseudo-functor のなす 2-圏 $\mathsf{PsFun}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Cat})$ から $\mathscr{C}$ 上の圏のなす 2-圏 $\mathsf{Cat}/\mathscr{C}$ への 2-関手

$$\int : \mathsf{PsFun}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Cat}) \longrightarrow \mathsf{Cat}/\mathscr{C}$$

を定める．この関手を Grothendieck **構成** (*Grothendieck construction*) という．Grothendieck 構成 $\int$ は，$\mathsf{PsFun}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Cat})$ とファイバー圏のなす 2-部分圏 $\mathsf{Fib}(\mathscr{C}) \subseteq \mathsf{Cat}/\mathscr{C}$ との間の 2-圏同値を誘導する．命題 2.15 はこの事実の一部である．

注意 2.17. 前層 $\Phi\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ に対する Grothendieck 構成は，Φ の category of elements をとる構成 ([Rie16, §2.4]) と一致する．つまり，前層 $\Phi\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ に対し，圏 $\int \Phi$ とは

- $\int \Phi$ の対象は，$U \in \mathscr{C}$ と $x \in \Phi(U)$ の組 (U, x) である
- $\int \Phi$ の射 $(U, x) \to (V, y)$ は，$\mathscr{C}$ の射 $f\colon U \to V$ であって $\Phi f(y) = x$ をみたすものである

のような圏である．

2.4 ファイバー圏の例

例 2.18. $\mathscr{C}$ を pullback を持つような圏とする．圏 $\mathsf{Arr}(\mathscr{C})$ を

- 対象は，$\mathscr{C}$ の射 $f\colon X \to U$ である
- 射 $(f\colon X \to U) \to (g\colon Y \to V)$ は，

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ U & \xrightarrow[b]{} & V \end{array}$$

  を可換にする $\mathscr{C}$ の射の組 (a, b) である

によって定める．関手 p を

$$p\colon \mathsf{Arr}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathscr{C} : (f\colon X \to U) \mapsto U$$

とすると，これによって $\mathsf{Arr}(\mathscr{C})$ は $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏になる．pullback が cartesian 射となる．このとき U 上のファイバーは，スライス圏 $\mathsf{Arr}(\mathscr{C})(U) = \mathscr{C}/U$ である．

定義 2.19. 圏 $\mathscr{C}$ に対して，$\mathscr{C}$ の**対象に関する性質** (*property on objects*) とは，subclass $\subseteq \mathrm{ob}(\mathscr{C})$ のこと．$U \in \mathcal{Q}$ のとき，U は $\mathcal{Q}$ をみたすという．また，$\mathscr{C}$ の**射に関する性質** (*property of morphisms*) とは，subclass $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{mor}(\mathscr{C})$ のこと．$f \in \mathcal{P}$ のとき，f は $\mathcal{P}$ をみたすという．

$\mathscr{C}$ の射に関する性質 $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{mor}(\mathscr{C})$ が *stable* であるとは,

(a) $(f \colon X \to U) \in \mathcal{P}$ のとき, 任意の同型射 $\phi \colon X' \cong X$ と $\psi \colon U \cong U'$ に対して $\psi \circ f \circ \phi \in \mathcal{P}$ となる

(b) $(Y \to V) \in \mathcal{P}$ と $(U \to V) \in \mathrm{mor}(\mathscr{C})$ に対して，pullback $U \times_V Y$ が存在し，$((U \times_V Y) \to U) \in \mathcal{P}$ となる

をみたすときをいう．

例 2.20. 圏 $\mathscr{C}$ の stable property $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{mor}(\mathscr{C})$ に対して，圏 $\mathsf{Arr}(\mathcal{P})$ を

- 対象は，$\mathcal{P}$ をみたす射 $f \colon X \to U$ である
- 射 $(f \colon X \to U) \to (g \colon Y \to V)$ は,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ U & \xrightarrow[b]{} & V \end{array}$$

  を可換にする $\mathscr{C}$ の射の組 (a, b) である

によって定めると，関手

$$p \colon \mathsf{Arr}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathscr{C} : (f \colon X \to U) \mapsto U$$

によって $\mathsf{Arr}(\mathcal{P})$ は $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏になる．

例 2.21. 位相空間の圏 Top を，忘却関手 $F \colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Set}$ によって Set 上の圏とみなす．このとき Top は Set 上のファイバー圏になる．

∵) $Y \in \mathsf{Top}$ と $U \in \mathsf{Set}$，および写像 $f \colon U \to FY$ を任意にとる．U に，f が連続となる最小の位相を入れて，位相空間 X をつくるとき，連続写像 $f \colon X \to Y$ が Y の pullback を与える．

この場合 $\mathsf{Top}(U)$ は集合 U 上に入る位相たちのなす poset である．

例 2.22. S-スキームの圏 Sch/S 上において

- S-スキーム U に対して，U 上の準連接層のなす圏 $\mathsf{Qcoh}(U)$ を対応させる
- S-スキームの射 $f \colon U \to V$ に対して，inverse image functor $f^* \colon \mathsf{Qcoh}(V) \to \mathsf{Qcoh}(U)$

を対応させる

なる対応を考えると，Qcoh は Sch/S 上の pseudo functor になる．したがって Grothendieck 構成により Sch/S 上のファイバー圏 $\int \mathsf{Qcoh}$ が得られる．このファイバー圏も $\mathsf{Qcoh} = \mathsf{Qcoh}/S$ とかく．

2.5 Categories fibered in groupoids

定義 2.23. 圏 $\mathscr{C}$ 上の**亜群をファイバーに持つ圏** (*category fibered in groupoids*) とは，$\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathscr{F}$ であって

- 任意の $U \in \mathscr{C}$ に対して，$\mathscr{F}(U)$ は groupoid である

をみたすもののこと．

これに対比して，通常のファイバー圏を *category fibered in categories* と呼ぶこともある．
$\mathscr{C}$ 上の category fibered in groupoids のなす $\mathsf{Fib}(\mathscr{C})$ の 2-部分圏を，$\mathsf{FibGrpd}(\mathscr{C})$ とかく．
次の同値な条件で定義されることも多い．

命題 2.24. $\mathscr{C}$ 上の圏 $\mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{F}$ が category fibered in groupoids であることと，次の二条件が成り立つことは同値である．

(i) $\mathscr{F}$ のすべての射は cartesian である．

(ii) 任意の $\mathscr{C}$ の射 $f\colon U \to V$ と対象 $v \in \mathscr{F}(V)$ に対して，$p_{\mathscr{F}}(\phi) = f$ となる $\phi\colon u \to v$ が存在する．

Proof. ($\Rightarrow$): (ii) は明らか．$\mathscr{F}$ の射 $\psi\colon w \to v$ を任意にとるとき，補題 2.8 より分解 $\psi = \phi \circ \lambda$ であって ϕ は cartesian で λ は $\mathscr{F}(p(w))$ の射であるようなものが存在する．ここで $\mathscr{F}$ は fibered in groupoids だから $\mathscr{F}(p(w))$ は groupoid で，λ は同型射である．よって $\psi = \phi \circ \lambda$ も cartesian である．

($\Leftarrow$): $\mathscr{F}$ がファイバー圏であることは明らか．$\mathscr{F}(U)$ の射 $\phi\colon u \to u'$ を任意に取ると，(i) より ϕ は cartesian だから

$$
\begin{tikzcd}
u' \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_u"] \arrow[dr, dashed, "\psi"'] & & \\
& u \arrow[r, "\phi"'] & u' \arrow[dd, mapsto] \\
U \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_U"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_U"'] & & \\
& U \arrow[r, equal] & U
\end{tikzcd}
$$

なる $\psi\colon u' \to u$ がとれ，$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_u$ となる．また

$$\begin{tikzcd}
u' \arrow[dr, dashed, "\exists !"'] \arrow[drr, bend left, "\phi"] & & \\
& u' \arrow[r, "\phi"'] & u \\
& & \mapsto \\
U \arrow[dr, "\mathrm{id}_U"'] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_U"] & & \\
& U \arrow[r, equal] & U
\end{tikzcd}$$

において，$\psi \circ \phi$ も $\mathrm{id}_{u'}$ もこの図式の一意性の部分をみたすから，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{u'}$ である．よって ϕ は同型射で，$\mathscr{F}(U)$ は groupoid となる． $\square$

系 2.25. $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ を $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏とし，$F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ を $\mathscr{C}$ 上の関手とする．$\mathscr{G}$ が fibered in groupoids ならば，F は cartesian functor である．

Proof. 命題 2.24 より，$\mathscr{G}$ の射はすべて cartesian であるから，F は cartesian 射を保つ． $\square$

定義 2.26. $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{F}$ の**ファイバー部分圏** (*fibered subcategory*) とは，$\mathscr{F}$ の部分圏 $\mathscr{G}$ であって

- $\mathscr{G}$ は関手 $\mathscr{G} \hookrightarrow \mathscr{F} \to \mathscr{C}$ によって $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏になる
- 包含関手 $\mathscr{G} \hookrightarrow \mathscr{F}$ はファイバー圏の間の cartesian functor である

をみたすもののこと．

例 2.27. $\mathscr{F}$ を $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏とする．$\mathscr{F}$ の充満部分圏 $\mathscr{G}$ が，

$$\mathscr{F} \text{ の cartesian 射 } u \to v \text{ に対し，} v \in \mathscr{G} \text{ ならば } u \in \mathscr{G}$$

をみたすとすると，$\mathscr{G}$ は $\mathscr{F}$ のファイバー部分圏になる．$\mathscr{G}$ の cartesian 射は，codomain が $\mathscr{G}$ の対象であるような $\mathscr{F}$ の cartesian 射である．

命題 2.28. $\mathscr{F}$ を $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏とする．$\mathscr{F}$ の部分圏 $\mathscr{F}_{\mathrm{cart}}$ を

- $\mathscr{F}_{\mathrm{cart}}$ の対象は，$\mathscr{F}$ の対象である
- $\mathscr{F}_{\mathrm{cart}}$ の射は，$\mathscr{F}$ の cartesian 射である

によって定めるとき，$\mathscr{F}_{\mathrm{cart}}$ は $\mathscr{F}$ の subcategory fibered in groupoids になる．これを $\mathscr{F}$ に付随する category fibered in groupoids という．

Proof. 命題 2.24 より明らか． $\square$

命題 2.29. $\mathscr{F}$ を $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏とする．任意の category fibered in groupoids $\mathscr{G}$ と cartesian functor $F\colon \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ に対して，F の像は $\mathscr{F}_{\mathrm{cart}}$ に入る．すなわち，$(-)_{\mathrm{cart}}\colon \mathsf{Fib}(\mathscr{C}) \to \mathsf{FibGrpd}(\mathscr{C})$ は包含関手 $\mathsf{FibGrpd}(\mathscr{C}) \hookrightarrow \mathsf{Fib}(\mathscr{C})$ の右随伴である．

Proof. 命題 2.24 と命題 2.6 より従う． □

2.6 Categories fibered in sets

定義 2.30. 圏 $\mathscr{C}$ 上の**集合をファイバーに持つ圏** (*category fibered in sets*) とは，$\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathscr{F}$ であって

- 任意の $U \in \mathscr{C}$ に対して，$\mathscr{F}(U)$ は集合である

をみたすもののこと．

$\mathscr{C}$ 上の category fibered in sets のなす $\mathsf{Fib}(\mathscr{C})$ の 2-部分圏を，$\mathsf{FibSet}(\mathscr{C})$ とかく．集合は groupoid だから，$\mathsf{FibSet}(\mathscr{C}) \subseteq \mathsf{FibGrpd}(\mathscr{C})$ である．

命題 2.31. $\mathscr{C}$ 上の圏 $\mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{F}$ が category fibered in sets であることと，

- 任意の $\mathscr{C}$ の射 $f\colon U \to V$ と対象 $v \in \mathscr{F}(V)$ に対して，$p_{\mathscr{F}}(\phi) = f$ となる $\phi\colon u \to v$ が一意的に存在する

が成り立つことは同値である．

Proof. ($\Rightarrow$): 任意の $\mathscr{C}$ の射 $f\colon U \to V$ と $v \in \mathscr{F}(V)$ に対して，f による v の pullback $\phi\colon u \to v$ があるから，存在性はよい．$p(\phi') = f$ なる $\phi'\colon u' \to v$ が別にあるとすると，ϕ は cartesian だから

$$\begin{tikzcd}
u' \arrow[dr, dashed, "\psi"'] \arrow[drr, bend left, "\phi'"] & & \\
& u \arrow[r, "\phi"'] & u \arrow[d, mapsto] \\
U \arrow[dr, equal] \arrow[drr, bend left, "f"] & & {} \\
& U \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}$$

なる ψ が存在する．ここで $\mathscr{F}$ は fibered in sets だから $\mathscr{F}(U)$ は集合で，$\psi = \mathrm{id}_{u'}$．よって $\phi = \phi'$ となるから一意性も成り立つ．

($\Leftarrow$): $\mathscr{F}$ がファイバー圏であることは，条件の一意性を用いて直ちに確認できる．$\mathscr{F}(U)$ の射 $\phi\colon u \to u'$ を任意に取ると，$p(\phi) = \mathrm{id}_U = p(\mathrm{id}_u)$ だから条件の一意性より $\phi = \mathrm{id}_u$ となる．よって $\mathscr{F}(U)$ は集合である． □

Grothendieck 構成によって次が成り立つ．

命題 2.32. Grothendieck 構成 $\int$ は圏同値

$$\mathsf{Func}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}) \simeq \mathsf{FibSet}(\mathscr{C})$$

を誘導する．

Proof. 関手 $\int\colon \mathsf{Func}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}) \to \mathsf{FibSet}(\mathscr{C})$ を次のように定める：

- 関手 $\Phi\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ に対して，$\int \Phi$ を Φ の要素の圏とする (cf. 注意 2.17).
- 自然変換 $\sigma\colon \Phi \to \Psi$ に対して，関手 $\int \sigma$ を

$$\int \Phi \longrightarrow \int \Psi; \quad (U, x) \mapsto (U, \sigma_U(x))$$

  とする．系 2.25 よりこれは cartesian functor である．

一方，関手 $\Sigma\colon \mathsf{FibSet}(\mathscr{C}) \to \mathsf{Func}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$ を次のように定める：

- 集合をファイバーに持つ圏 $\mathscr{F}$ に対して，命題 2.13 の $\Sigma(\mathscr{F})$ を考える．命題 2.31 より $\Sigma(\mathscr{F})$ は関手 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ をなすことがわかる．
- (cartesian) 関手 $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ に対して，$U \in \mathscr{C}$ 上のファイバーの間に誘導される写像 $\Sigma(F)_U = F_U\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ は U について自然で，自然変換 $\Sigma(F)\colon \Sigma(\mathscr{F}) \to \Sigma(\mathscr{G})$ が得られる．

このとき，$U \in \mathscr{C}$ に対して，$\Sigma \int \Phi(U) = \int \Phi(U) \cong \Phi(U)$ となるから $\Sigma \int \Phi \cong \Phi$ である．一方，関手 $\mathscr{F} \to \int \Sigma \mathscr{F}$ を $u \mapsto (p(u), u)$ と定めれば，同型になることがわかる．よって $\int$ と Σ は互いに逆を与え，圏同値 $\mathsf{Func}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}) \simeq \mathsf{FibSet}(\mathscr{C})$ が成り立つ． $\square$

2.7 Categories fibered in setoids

定義 2.33. 亜集合 (*setoid*) とは，groupoid $\mathscr{C}$ であって任意の $U, V \in \mathscr{C}$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(U, V)$ が高々一元集合であるもののこと．

注意 2.34. ある集合上の同値関係があるとき，これは自然に setoid と見なせる：集合 X 上に同値関係 $R \subseteq X \times X$ があるとき，X の元を対象とし xRy のとき射 $x \to y$ があるとして圏を作れば，この圏は small な setoid になる．逆に，small setoid $\mathscr{C}$ に対して，$X = \mathrm{ob}(\mathscr{C}), R = \mathrm{mor}(\mathscr{C})$ とすれば R は X 上の同値関係になる．

このことは次のように一般化できる．

命題 2.35. 圏 $\mathscr{C}$ に対し

$$\mathscr{C} \text{ は setoid である} \iff \mathscr{C} \text{ は集合に圏同値である．}$$

Proof. $(\Rightarrow)$: $\mathscr{C}$ を setoid とすると，各 $U \in \mathscr{C}$ に対し $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(U,U) = \{\mathrm{id}_U\}$ であるから，$\mathscr{C}$ の同型類の代表元を集めた集合を C とすれば，$C \hookrightarrow \mathscr{C}$ が圏同値になる．

$(\Leftarrow)$: C を集合とし，圏同値 $F\colon \mathscr{C} \to C$ があるとする．$U, V \in \mathscr{C}$ に対して $F_{U,V}\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(U,V) \to \mathrm{Hom}_C(FU,FV)$ が全単射だから，C が集合より $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(U,V)$ は高々一元集合である．$f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(U,V)$ をとるとき，Ff は恒等射であるから $FU = FV$ である．特に $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V,U) \neq \emptyset$ である．このとき $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V,U)$ を取れば，$f \circ g = \mathrm{id}_V$，$g \circ f = \mathrm{id}_U$ となり，f は同型射．よって $\mathscr{C}$ は groupoid である． □

定義 2.36. 圏 $\mathscr{C}$ 上の**亜集合をファイバーに持つ圏** (*category fibered in setoids*) とは，$\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathscr{F}$ であって

- 任意の $U \in \mathscr{C}$ に対して，$\mathscr{F}(U)$ は setoid である

をみたすもののこと．

$\mathscr{C}$ 上の category fibered in setoids のなす $\mathsf{Fib}(\mathscr{C})$ の 2-部分圏を，$\mathsf{FibSetd}(\mathscr{C})$ とかく．集合は setoid で setoid は groupoid だから，$\mathsf{FibSet}(\mathscr{C}) \subseteq \mathsf{FibSetd}(\mathscr{C}) \subseteq \mathsf{FibGrpd}(\mathscr{C})$ である．

命題 2.37. $\mathscr{C}$ 上の圏 $\mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{F}$ が category fibered in setoids であることと，次の二条件が成り立つことは同値である．

(i) 任意の $\mathscr{C}$ の射 $f\colon U \to V$ と対象 $v \in \mathscr{F}(V)$ に対して，$p_{\mathscr{F}}(\phi) = f$ となる $\phi\colon u \to v$ が存在する．さらに $\mathscr{F}$ の射 $\phi'\colon u' \to v$ も $p_{\mathscr{F}}(\phi') = f$ をみたすとするとき，$\phi' \circ \lambda = \phi$ となる $\mathscr{F}(U)$ の射 $\lambda\colon u \to u'$ が存在する．

(ii) 任意の $\mathscr{C}$ の射 $f\colon U \to V$ と対象 $u \in \mathscr{F}(U), v \in \mathscr{F}(V)$ に対して，$p_{\mathscr{F}}(\phi) = f$ となる $\phi\colon u \to v$ は高々一つである．

Proof. $(\Rightarrow)$: (i) の前半は明らか．後半について，$\mathscr{F}$ は fibered in groupoids であるから命題 2.24 より ϕ' は cartesian で，

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[dr, dashed, "\lambda"'] \arrow[drr, bend left, "\phi"] & & \\
& u' \arrow[r, "\phi'"'] & v \arrow[dd, mapsto] \\
U \arrow[dr, "\mathrm{id}_U"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& U \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}$$

となる λ が存在する．

(ii) $\phi, \psi\colon u \to v$ が $p(\phi) = p(\psi) = f$ をみたすとすると，(i) より $\psi \circ \lambda = \phi$ なる $\mathscr{F}(U)$ の射 $\lambda\colon u \to u$ が存在する．$\mathscr{F}(U)$ は setoid より $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(U)}(u, u) = \{\mathrm{id}_u\}$ だから $\lambda = \mathrm{id}_u$，よって $\phi = \psi$ となる．

($\Leftarrow$): まず $\mathscr{F}$ の任意の射 $\phi\colon u \to v$ が cartesian であることを示す．$p(\phi) = f\colon U \to V$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
w \arrow[drr, bend left, "\forall\psi"] & & \\
& u \arrow[r, "\phi"'] & v \arrow[dd, phantom, "\downarrow"] \\
W \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[dr, "\forall h"'] & & \\
& U \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}
$$

となる ψ，h を任意にとると，(i) より $p(\theta) = h$ なる $\theta\colon w' \to u$ が存在する．$p(\psi) = g = f \circ h = p(\phi \circ \theta)$ だから再び (i) より，$\phi \circ (\theta \circ \lambda) = \psi$ なる $\mathscr{F}(W)$ の射 $\lambda\colon w \to w'$ が存在する．(ii) よりこのような $\theta \circ \lambda$ は一意的で，よって ϕ は cartesian である．

したがって (i) と命題 2.24 より，$\mathscr{F}$ は fibered in groupoids である．$u, u' \in \mathscr{F}(U)$ に対して，(ii) より $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(U)}(u, u')$ は高々一元集合であり，よって各 $\mathscr{F}(U)$ は setoid である．$\square$

2.8 ファイバー圏の同値

ファイバー圏のなす 2-圏の 2-morphism は，base-preserving な自然変換 $\alpha\colon F \to G$，すなわちすべての $u \in \mathscr{F}$ に対して $p_{\mathscr{G}}(\alpha_u) = \mathrm{id}_{p_{\mathscr{F}}(u)}$ となる自然変換のことであった．

$\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ に対して，その間の cartesian functor と base-preserving な自然変換のなす圏を $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ と表す．

定義 2.38. $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏の間の cartesian functor $F, G\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ に対して，F と G の**同型** (*isomorphism*) とは，自然同型 $\alpha\colon F \xrightarrow{\cong} G$ であって base-preserving であるもののこと．F と G の同型があるとき，F と G は同型であるといい，$F \cong G$ とかく．

base-preserving な自然同型の逆変換は明らかに base-preserving であるから，F と G の同型とは，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ の同型射に他ならない．

定義 2.39. $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ を $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏，$F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ を cartesian functor とする．

(i) F が**忠実/充満/充満忠実** (*faithful / full / fully faithful*) であるとは，圏 $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ の間の通常の関手として忠実/充満/充満忠実であるときをいう．

(ii) F がファイバー圏の**同値関手** (*equivalence*) であるとは，cartesian functor $G\colon \mathscr{G} \to \mathscr{F}$

が存在して base-preserving な同型

$$G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathscr{F}}, \quad F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathscr{G}}$$

が成り立つときをいう．ファイバー圏の同値関手があるとき，$\mathscr{F}$ と $\mathscr{G}$ はファイバー圏として同値であるといい，$\mathscr{F} \simeq \mathscr{G}$ とかく．

つまり cartesian functor F は 2-圏 $\mathsf{Fib}(\mathscr{C})$ の equivalence であるとき，同値関手という．

命題 2.40. $\mathscr{F}, \mathscr{F}', \mathscr{G}, \mathscr{G}'$ を $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏とし，$F\colon \mathscr{F}' \to \mathscr{F}, G\colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$ を同値関手とする．このとき，

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{F}', \mathscr{G}')\,; \quad H \mapsto G \circ H \circ F$$

は圏同値である．

Proof. 明らか． □

命題 2.41. ファイバー圏の間の cartesian functor $F\colon (\mathscr{F}, p) \to (\mathscr{G}, q)$ に対して，

$$F \text{ は充満忠実} \iff \text{すべての } U \in \mathscr{C} \text{ に対し } F_U\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U) \text{ は充満忠実}$$

が成り立つ．

Proof. ($\Rightarrow$): 明らか．

($\Leftarrow$): 任意の $u, v \in \mathscr{F}$ をとるとき，$U = p(u), V = p(v)$ とおき，

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(u,v) \arrow[rr, "F_{u,v}"] \arrow[dr, "p_{u,v}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(F(u), F(v)) \arrow[dl, "q_{Fu,Fv}"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(U,V) &
\end{tikzcd}$$

を考える．F が充満忠実であることを示すためには，任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(U, V)$ に対して

$$p_{u,v}^{-1}(f) \longrightarrow q_{Fu,Fv}^{-1}(f)\,; \quad \phi \mapsto F(\phi)$$

が全単射になることを示せばよい．$\mathscr{F}$ はファイバー圏だから，$p(\kappa) = f$ なる cartesian 射 $\kappa\colon u' \to v$ が存在する．このとき cartesian 射の普遍性から

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(U)}(u, u') \longrightarrow p_{u,v}^{-1}(f)\,; \quad \phi \mapsto \kappa \circ \phi$$

は全単射になる．F は cartesian functor だから $F(\kappa)$ も cartesian 射であり，普遍性から

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(U)}(F(u), F(u')) \longrightarrow q_{Fu,Fv}^{-1}(f)\,; \quad \psi \mapsto F(\kappa) \circ \psi$$

も全単射である．仮定より

$$F_U\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(U)}(u, u') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(U)}(F(u), F(u'))$$

が全単射であるから，これらを合わせて $p_{u,v}^{-1}(f) \to q_{Fu,Fv}^{-1}(f)$ が全単射であることがわかる． $\square$

定理 2.42. ファイバー圏の間の cartesian functor $F\colon (\mathscr{F}, p) \to (\mathscr{G}, q)$ に対して，

$$F \text{ は } \mathsf{Fib}(\mathscr{C}) \text{ の同値関手} \iff \text{すべての } U \in \mathscr{C} \text{ に対し } F_U\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U) \text{ は圏同値}$$

が成り立つ．

$\mathsf{Fib}(\mathscr{C})$ において同値関手であることと，Cat において同値関手であることは一致しないことに注意する．よって ($\Leftarrow$) で本質的全射性を示すだけでは不十分であり，定義に戻って証明する必要がある．

Proof. ($\Rightarrow$): F はファイバー圏の間の同値関手だから，cartesian functor $G\colon \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ と base-preserving な自然同型 $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathscr{F}}, F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathscr{G}}$ が存在する．このときこの base-preserving な自然同型は，各 $U \in \mathscr{C}$ に対して自然同型 $G_U \circ F_U \cong \mathrm{id}_{\mathscr{F}U}, F_U \circ G_U \cong \mathrm{id}_{\mathscr{G}U}$ を誘導し，F_U は圏同値となる．

($\Leftarrow$): まず関手 $G\colon \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ を構成しよう．各 $x \in \mathscr{G}$ に対して $U = q(x)$ とすると，F_U が本質的全射であることから，$G(x) \in \mathscr{F}(U)$ と $\mathscr{G}(U)$ の同型射 $\alpha_x\colon x \xrightarrow{\cong} F(G(x))$ が存在する．$\mathscr{G}$ の射 $\phi\colon x \to y$ があるとき，命題 2.41 より F は充満忠実であることから，

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\phi"] & y \arrow[d, "\alpha_y"] \\
F(G(x)) \arrow[u, "\alpha_x^{-1}"] \arrow[r, dashed, "F(G(\phi))"'] & F(G(y))
\end{tikzcd}$$

を可換にする $\mathscr{F}$ の射 $G(\phi)\colon G(x) \to G(y)$ が一意的に存在する．一意性により，対応 $x \mapsto G(x)$ は関手 $G\colon \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ を定め，射の族 $\{\alpha_x\}$ は自然同型 $\alpha\colon \mathrm{id}_{\mathscr{G}} \cong F \circ G$ をなす．構成から G は $\mathscr{C}$ 上の関手となり，α は base-preserving な自然同型となることがわかる．

次に G が cartesian functor であることを示そう．$\phi\colon x \to y$ を $\mathscr{G}$ の cartesian 射とし，$q(\phi) = f\colon U \to V$ とおく．$\mathscr{F}$ の射 $G(\phi)$ について

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[rrd, bend left, "\forall\psi"] & & \\
& G(x) \arrow[r, "G(\phi)"'] & G(y) \arrow[dd, mapsto, "p"] \\
W \arrow[rrd, bend left, "g"] \arrow[rd, "\forall h"'] & & \\
& U \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}$$

となる ψ, h をとる．関手 F でうつして

$$
\begin{tikzcd}
F(w) \arrow[drr, bend left, "F(\psi)"] & & \\
& F(G(x)) \arrow[r, "F(G(\phi))"'] \arrow[d, phantom, "\cong" sloped] & F(G(y)) \arrow[d, phantom, "\cong" sloped] \\
& x \arrow[r, "\phi"'] & y \arrow[dd, "q"] \\
W \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[dr, "h"'] & & \\
& U \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}
$$

を考えると, ϕ が cartesian だから命題 2.6 より $F(G(\phi))$ も cartesian で, $q(\lambda) = h$ かつ $F(G(\phi)) \circ \lambda = F(\psi)$ をみたす $\lambda\colon F(w) \to F(G(x))$ が一意に存在する．F の充満忠実性から，$F(\theta) = \lambda$ なる $\theta\colon w \to G(x)$ が一意的に存在する．この θ は $p(\theta) = h$ かつ $G(\phi) \circ \theta = \psi$ をみたす一意的な射である．よって $G(\phi)$ は cartesian で，G は cartesian functor である．

あとは base-preserving な自然同型 $\beta\colon \mathrm{id}_{\mathscr{F}} \to G \circ F$ を構成すればよい．$u \in \mathscr{F}$ に対して，$p(u) = U$ とおくとき，$\mathscr{G}(U)$ の同型射 $\alpha_{F(u)}\colon F(u) \xrightarrow{\cong} F(G(F(u)))$ がある．F_U は圏同値だから，$F(\beta_u) = \alpha_{F(u)}$ となる $\mathscr{F}(U)$ の同型射 $\beta_u\colon u \xrightarrow{\cong} G(F(u))$ が一意的に存在する．$\mathscr{F}$ の射 $\psi\colon u \to v$ に対して

$$F(\beta_v \circ \psi) = \alpha_{F(v)} \circ F(\psi) = F(G(F(\psi))) \circ \alpha_{F(u)} = F(G(F(\psi)) \circ \beta_u)$$

であるから，F の忠実性より $\beta_v \circ \psi = G(F(\psi)) \circ \beta_u$ が成り立つ．したがって射の族 $\{\beta_u\}$ は base-preserving な自然同型 $\beta\colon \mathrm{id}_{\mathscr{F}} \cong G \circ F$ をなす．以上より F はファイバー圏の間の同値関手であることが示せた． □

命題 2.43. $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ を $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏とする．

(i) $\mathscr{G}$ が fibered in groupoids であるとき，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ は groupoid である．

(ii) $\mathscr{G}$ が fibered in setoids であるとき，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ は setoid である．

(iii) $\mathscr{G}$ が fibered in sets であるとき，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ は集合である．

Proof. (i) $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ の射 $\alpha\colon F \to G$ を任意に取る．このとき α は base-preserving であるから，$U \in \mathscr{C}$ と $u \in \mathscr{F}(U)$ に対して，α_u は $\mathscr{G}(U)$ の射である．今 $\mathscr{G}(U)$ は groupoid だから α_u は同型射で，したがって α は自然同型である．よって $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ は groupoid である．

(ii)，(iii) も同様に示せる． □

2.9 表現可能ファイバー圏と 2-米田の補題

命題 2.32 で圏同値 $\mathsf{Func}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}) \simeq \mathsf{FibSet}(\mathscr{C})$ があることをみた．米田埋め込みと合わせれば，圏の列

$$\mathscr{C} \overset{h}{\hookrightarrow} \mathsf{Func}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}) \overset{\int}{\simeq} \mathsf{FibSet}(\mathscr{C}) \hookrightarrow \mathsf{Fib}(\mathscr{C})$$

が得られ，$\mathscr{C}$ は $\mathsf{Fib}(\mathscr{C})$ の中に埋め込めることがわかる．この埋め込みのもと，$X \in \mathscr{C}$ は $\int h_X \cong \mathscr{C}/X \in \mathsf{Fib}(\mathscr{C})$ と同一視することができる．

定義 2.44. $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathscr{F}$ が**表現可能** (*representable*) であるとは，あるスライス圏 $\mathscr{C}/X$ とファイバー圏として圏同値であるときをいう．

定理 2.45 (2-米田の補題)**.** $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathscr{F}$ と対象 $X \in \mathscr{C}$ に対して

$$\Theta\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{C}/X, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{F}(X)\,; \quad G \mapsto G(X, \mathrm{id}_X)$$

は圏同値を与える．

Proof. 関手 $\Xi\colon \mathscr{F}(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{C}/X, \mathscr{F})$ を次のように定義する．

- 対象 $x \in \mathscr{F}(X)$ に対して，関手 $F_x\colon \mathscr{C}/X \to \mathscr{F}$ を
  - $\mathscr{C}/X$ の対象 $(U \xrightarrow{u} X)$ に対し，$F_x(U, u) \coloneqq u^*x$ とする
  - $\mathscr{C}/X$ の射 $g\colon (U \xrightarrow{u} X) \to (V \xrightarrow{v} X)$ に対し，

$$\begin{tikzcd}
u^*x \arrow[dr, dashed, "F_x(g)"'] \arrow[drr, bend left, "\kappa_u"] & & \\
& v^*x \arrow[r, "\kappa_v"'] & x \arrow[dd, mapsto] \\
U \arrow[dr, "g"'] \arrow[drr, bend left, "u"] & & \\
& V \arrow[r, "v"'] & X
\end{tikzcd}$$

    によって得られる一意的な射を $F_x(g)$ とする

  によって定める．普遍性より F_x は $\mathscr{C}$ 上の関手となる．さらに命題 2.6 (iii) により $F_x(g)$ は常に cartesian だから，F_x は cartesian functor となる．これを $\Xi(x) = F_x$ と置く．
- $\mathscr{F}(X)$ の射 $\phi\colon x \to x'$ に対して，自然変換 $\alpha_\phi\colon F_x \to F_{x'}$ を

– $\mathscr{C}/X$ の対象 $(U \xrightarrow{u} X)$ に対し，

$$
\begin{tikzcd}
u^*x \arrow[rr, "\kappa_u"] \arrow[dr, dashed, "\alpha_\phi(U,u)"'] & & x \arrow[dr, "\phi"] & \\
& u^*x' \arrow[rr, "\kappa_u"'] & & x' \arrow[dd, phantom, "\mapsdown"] \\
U \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, equal] & & X \arrow[dr, equal] & \\
& U \arrow[rr, "u"'] & & X
\end{tikzcd}
$$

によって得られる一意的な射を $\alpha_\phi(U,u)$ とする

の族 $\{\alpha_\phi(U,u)\}$ として定める．普遍性よりこれは自然変換である．構成から α_ϕ は base-preserving であり，これを $\Xi(\phi) = \alpha_\phi$ と置く．

このとき Θ, Ξ が圏同値を与えることを示そう．まず $x \in \mathscr{F}(X)$ に対して，$\mathscr{F}(X)$ での同型

$$\Theta \circ \Xi(x) = \Theta(F_x) = F_x(X, \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X^* \, x \cong x$$

がある．これは x について自然で，同型 $\Theta \circ \Xi \cong \mathrm{id}_{\mathscr{F}(X)}$ を与える．

一方 $G \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{C}/X, \mathscr{F})$ に対して，

$$\Xi \circ \Theta(G) = \Xi(G(X, \mathrm{id}_X)) = F_{G(X,\mathrm{id}_X)} \colon \mathscr{C}/X \longrightarrow \mathscr{F}$$

であり，$(U \xrightarrow{u} X) \in \mathscr{C}/X$ があるとき $F_{G(X,\mathrm{id}_X)}(U \xrightarrow{u} X) = u^*(G(X, \mathrm{id}_X))$ である．ここで $\mathscr{C}/X$ は fibered in sets だから，命題 2.24 より射 $u \colon (U,u) \to (X, \mathrm{id}_X)$ は cartesian 射であり，G が cartesian functor であることから $G(u) \colon G(U,u) \to G(X, \mathrm{id}_X)$ も cartesian 射となる．したがって，$\mathscr{F}(U)$ での同型

$$G(U,u) \cong u^*(G(X, \mathrm{id}_X)) = F_{G(X,\mathrm{id}_X)}(U \xrightarrow{u} X)$$

が成り立つ．これは (U,u) について自然で，base-preserving な自然同型 $G \cong F_{G(X,\mathrm{id}_X)} = \Xi \circ \Theta(G)$ をなし，さらにこれは G について自然で，同型 $\mathrm{id} \cong \Xi \circ \Theta$ を与える． □

系 2.46. 圏 $\mathscr{C}$ に対して，全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{C}/X, \mathscr{C}/Y)$$

が存在する．

Proof. 定理 2.45 において，$\mathscr{F} = \mathscr{C}/Y$ とすればよい．命題 2.43 より $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{C}/X, \mathscr{C}/Y)$ が集合であることに注意． □

2-米田の補題を使えば，次のようなこともわかる．

命題 2.47. $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{F}$ が表現可能であることと，次の二条件が成り立つことは同値である．

(i) $\mathscr{F}$ は fibered in groupoids である

(ii) $\mathscr{F}$ において
$$\exists X \in \mathscr{C}, \exists x \in \mathscr{F}(X), \quad \forall u \in \mathscr{F}, \exists!\, u \to x \text{ in } \mathscr{F}$$
が成り立つ．

Proof. ($\Rightarrow$): $G\colon \mathscr{C}/X \to \mathscr{F}$ が同値関手であるとする．$x = \Theta(G) \in \mathscr{F}(X)$ とおくと，定理 2.45 より $G' := \Xi(x) \cong G$ であるから G' も同値関手である．よって定理 2.42 より，任意の $U \in \mathscr{C}$ に対して
$$G'_U\colon \mathscr{C}/X(U) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(U, X) \longrightarrow \mathscr{F}(U)\,; \quad (U \xrightarrow{f} X) \mapsto f^*x$$
が圏同値になる．よって $\mathscr{F}$ は fibered in setoids であり，任意の $u \in \mathscr{F}$ に対して，$U = p(u)$ とすると，G'_U の本質的全射性より $\mathscr{C}$ の射 $f\colon U \to X$ が存在して $f^*x \cong u$ となり，$\mathscr{F}$ の射 $u \xrightarrow{\cong} f^*x \xrightarrow{\kappa_f} x$ が得られる．射 $u \to x$ の一意性は命題 2.37 よりわかる．

($\Leftarrow$): $X \in \mathscr{C}$，$x \in \mathscr{F}(X)$ に対して，$G := \Xi(x)\colon \mathscr{C}/X \to \mathscr{F}$ とおく．G が同値関手であることを示そう．定理 2.42 より，各 $U \in \mathscr{C}$ に対して G_U が圏同値であることを示せばよい．まず $(f\colon U \to X) \in \mathscr{C}/X$ に対して，$\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(U)}(f^*x, f^*x)$ をとると，条件 (ii) の一意性から $\kappa_f = \kappa_f \circ \psi$ が成り立ち，cartesian 射の普遍性より $\psi = \mathrm{id}_{f^*x}$ となる．このことから G_U が充満忠実であることがわかる．また $u \in \mathscr{F}(U)$ を任意に取るとき，条件 (ii) より射 $\psi\colon u \to x$ が存在するが，条件 (i) より $\mathscr{F}$ の射はすべて cartesian であるから，$\mathscr{F}(U)$ の同型 $u \cong p(\phi)^*x$ が成り立つ．このことから G_U が本質的全射であることがわかる． □

2.10 Splitting

すべてのファイバー圏は cleavage を持ち，Grothendieck 構成の逆によって pseudo-functor が対応する．このとき構成した pseudo-functor が通常の意味での関手になるような cleavage はどんなものであろうか．このような cleavage を特徴づけるのが splitting である．

定義 2.48. ファイバー圏 $\mathscr{F}$ の cleavage K が *splitting* であるとは，K が $\mathscr{F}$ のすべての恒等射を含み，合成で閉じるときをいう．

splitting (cleavage) を備えたファイバー圏は *split* であるという．

命題 2.49. ファイバー圏 $\mathscr{F}$ とその cleavage K に対し，対応する pseudo-functor $\Sigma(\mathscr{F})$ が通常の関手になる必要十分条件は K が splitting であることである．

Proof. 構成の仕方からほとんど明らかである． □

一般に，ファイバー圏は splitting を持つとは限らないが，split なファイバー圏にファイバー圏として同値になることはわかる．

定理 2.50. $\mathscr{C}$ 上の任意のファイバー圏 $\mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{F}$ とファイバー圏として同値な split fibered category $\tilde{\mathscr{F}} \to \mathscr{C}$ が存在する．

Proof. 反変関手 $\Phi\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Cat}$ を，合成

$$\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{h^{\mathrm{op}}} \mathsf{Func}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\int} \mathsf{Fib}(\mathscr{C})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(-,\mathscr{F})} \mathsf{Cat}$$

として定める．$U \in \mathscr{C}$ に対して

$$\Phi(U) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathscr{C}/U, \mathscr{F})$$

である．関手 Φ に対応するファイバー圏を $\tilde{\mathscr{F}} := \int \Phi$ とおくと，定義から $\tilde{\mathscr{F}}$ は split fibered category となる．このとき自然な cartesian functor

$$\tilde{\mathscr{F}} \longrightarrow \mathscr{F}\,; \quad \tilde{\mathscr{F}}(U) \ni G \mapsto G(\mathrm{id}_U)$$

が存在するが，定理 2.45 と定理 2.42 よりこれはファイバー圏の同値関手になる． □

注意 2.51. 定理 2.50 を pseudo-functor の観点からいえば，通常の関手への strictification が存在しているということである．

2.11 The functors of arrows of a fibered category

$\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ をファイバー圏とし，cleavage を一つ固定する．この節では，$S \in \mathscr{C}$ と $x, y \in \mathscr{F}(S)$ に対して，$\mathscr{C}/S$ 上の前層

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(x, y)\colon (\mathscr{C}/S)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

を定義する．

$\mathscr{C}/S$ の対象 $U \xrightarrow{h} S$ に対して，

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(x, y)(U \xrightarrow{h} S) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(U)}(h^*x, h^*y)$$

と置く．$\mathscr{C}/S$ における射 $f\colon (U \xrightarrow{h} S) \to (U' \xrightarrow{h'} S)$ に対して，x, y の U' への pullback h'^*x, h'^*y の普遍性より

$$\begin{tikzcd}
h^*x \arrow[dr, dashed, "\sigma_f"'] \arrow[drr, bend left] & & \\
& h'^*x \arrow[r] & x \arrow[dd, mapsto] \\
U \arrow[dr, "f"'] \arrow[drr, bend left, "h"] & & \\
& U' \arrow[r, "h'"'] & S
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
h^*y \arrow[dr, dashed, "\tau_f"'] \arrow[drr, bend left] & & \\
& h'^*y \arrow[r] & y \arrow[dd, mapsto] \\
U \arrow[dr, "f"'] \arrow[drr, bend left, "h"] & & \\
& U' \arrow[r, "h'"'] & S
\end{tikzcd}$$

なる $\sigma_f\colon h^*x \to {h'}^*x, \tau_f\colon h^*y \to {h'}^*y$ が得られる．命題 2.6 (iii) より，σ_f, τ_f は $\mathscr{F}$ の cartesian 射である．このとき，$\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(U)}({h'}^*x, {h'}^*y)$ に対して，

$$\begin{tikzcd}
h^*x \arrow[r, "\sigma_f"] \arrow[dr, dashed, "f^\star\phi"'] & {h'}^*x \arrow[dr, "\phi"] & \\
& h^*y \arrow[r, "\tau_f"'] & {h'}^*y \arrow[dd, mapsto] \\
U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, equal] & U' \arrow[dr, equal] & \\
& U \arrow[r, "f"'] & U'
\end{tikzcd}$$

なる $f^\star\phi\colon h^*x \to h^*y$ が一意的に存在する．この対応によって写像

$$f^\star\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(U)}({h'}^*x, {h'}^*y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(U)}(h^*x, h^*y)$$

が定まる．これを $\underline{\mathrm{Hom}}_S(x, y)(f) = f^\star$ とする．

また別な $\mathscr{C}/S$ の射 $g\colon (U' \xrightarrow{h'} S) \to (U'' \xrightarrow{h''} S)$ があるとき，同様に $\sigma_g\colon {h'}^*x \to {h''}^*x$, $\tau_g\colon {h'}^*y \to {h''}^*y$ が得られるが，普遍性より

$$\sigma_{gf} = \sigma_g \circ \sigma_f, \quad \tau_{gf} = \tau_g \circ \tau_f$$

が成り立つ．同様に $\sigma_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}, \tau_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ も成り立ち，このことから

$$(gf)^\star = f^\star \circ g^\star, \quad (\mathrm{id})^\star = \mathrm{id}$$

であることがわかる．したがって $\underline{\mathrm{Hom}}_S(x, y)$ は $\mathscr{C}/S$ 上の前層であることがわかった．

注意 2.52. 関手 $\underline{\mathrm{Hom}}_S(x, y)$ は，同型を除いてファイバー圏 $\mathscr{F}$ の cleavage の取り方に依らない．

3 スタック

3.1 導入：連続写像と位相空間の張り合わせ

位相空間 U の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ があるとき, $i,j,k\in I$ に対して $U_{ij}=U_i\cap U_j$, $U_{ijk}=U_i\cap U_j\cap U_k$ とおく.

位相空間の間の連続写像は次のように張り合わせることができる.

命題 3.1. U を位相空間，$\{U_i\}_{i\in I}$ を U の開被覆とする．U 上の位相空間 $(f\colon X\to U)$, $(g\colon Y\to U)$ に対して，U_i 上の連続写像

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\phi_i"] \arrow[dr, "f|_{f^{-1}(U_i)}"'] & & g^{-1}(U_i) \arrow[dl, "g|_{g^{-1}(U_i)}"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

が与えられていて，任意の $i,j\in I$ について

$$\phi_i|_{f^{-1}(U_{ij})}=\phi_j|_{f^{-1}(U_{ij})}\colon f^{-1}(U_i\cap U_j)\longrightarrow g^{-1}(U_i\cap U_j)$$

が成り立つとする．このとき，$\phi|_{f^{-1}(U_i)}=\phi_i$ となる U 上の連続写像 $\phi\colon X\to Y$ が一意的に存在する.

Proof. □

この事実は次のように言い換えられる.

命題 3.2. 位相空間の圏 Top において,

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)\colon (\mathsf{Top}/S)^{\mathrm{op}}\longrightarrow \mathsf{Set}$$

は big classical topology に関する層である.

Proof. □

位相空間自体についても，張り合わせが成り立つ.

命題 3.3. U を位相空間，$\{U_i\}_{i\in I}$ を U の開被覆とする．U_i 上の位相空間 $(u_i\colon X_i\to U_i)$ に対して，U_{ij} 上の同相写像

$$\phi_{ij}\colon u_j^{-1}(U_{ij})\xrightarrow{\sim} u_i^{-1}(U_{ij})$$

が与えられていて，任意の $i,j,k\in I$ について

$$\phi_{ik}=\phi_{ij}\circ\phi_{jk}\colon u_k^{-1}(U_{ijk})\to u_j^{-1}(U_{ijk})\to u_i^{-1}(U_{ijk})$$

が成り立つとする．このとき，U 上の位相空間 $(u\colon X \to U)$ と U_i 上の同相写像 $\phi_i\colon u^{-1}(U_i) \cong X_i$ であって

$$\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}\colon u_j^{-1}(U_{ij}) \to u^{-1}(U_{ij}) \to u_i^{-1}(U_{ij})$$

となるものが存在する．ただし写像は適切に定義域を制限して考える．

Proof. □

スタックとは，こうした張り合わせができるようなファイバー圏のことである．上に述べた連続写像と位相空間の張り合わせが可能であるという事実は，“Cont := Arr(Top) は Top 上のスタックである” ということを主張するものである．

3.2 Descent data のなす圏

スタックとは，3.1 節で見たように，対象と射の張り合わせができるような site $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏のことである．ファイバー圏が pseudo-functor の概念と同じものであることを思い出せば，標語的に “スタックとは site 上の圏の層である” と表現できる．

層の条件を思い出すと，site $\mathscr{C}$ 上の前層 $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ が層であるとは，任意の $U \in \mathscr{C}$ とその被覆 $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}_{i\in I}$ に対して

$$F(U) \xrightarrow{\ e\ } \prod_{i\in I} F(U_i) \overset{\mathrm{pr}_1^*}{\underset{\mathrm{pr}_2^*}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} F(U_i \times_U U_j)$$

が equalizer であるときをいうのであった．$(\mathrm{pr}_1^*, \mathrm{pr}_2^*)\colon \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} F(U_i \times_U U_j)$ の equalizer を $F(\mathcal{U}) = \mathrm{Eq}(\mathrm{pr}_1^*, \mathrm{pr}_2^*)$ とすれば，$F(\mathcal{U})$ は被覆 $\mathcal{U}$ に関して張り合わせ条件をみたすような元の集合であり，F が層であることは自然な射

$$E\colon F(U) \longrightarrow F(\mathcal{U})$$

が同型であることと言い換えられる．“圏の層” であるスタックの場合，$F(\mathcal{U})$ に対応するのは張り合わせ条件をみたすデータの圏であり，**descent data の圏** (*category of descent data*) と呼ばれる．

$\mathscr{C}$ を site とし，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏とする．$\mathscr{F}$ の cleavage を一つ固定しておく．$U \in \mathscr{C}$ の被覆 $\mathcal{U} = \{U_i \xrightarrow{\sigma_i} U\}$ に対して，$U_{ij} = U_i \times_U U_j$，$U_{ijk} = U_i \times_U U_j \times_U U_k$ とおく．また

$\sigma_{ij} \coloneqq \sigma_i \circ \mathrm{pr}_1 = \sigma_j \circ \mathrm{pr}_2$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
U_{ij} \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, dashed, "\sigma_{ij}"] & U_j \arrow[d] \\
U_i \arrow[r] & U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& U_{ijk} \arrow[rr, "\mathrm{pr}_{23}"] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{12}"'] \arrow[dd, "\mathrm{pr}_{13}"] & & U_{jk} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
U_{ij} \arrow[rr] \arrow[dd] & & U_j \arrow[dd] & \\
& U_{ik} \arrow[rr] \arrow[dl] & & U_k \arrow[dl] \\
U_i \arrow[rr] & & U &
\end{tikzcd}
$$

定義 3.4. 被覆 $\mathcal{U} = \{U_i \xrightarrow{\sigma_i} U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して，$\mathcal{U}$ に関する U 上の *object with descent data* とは,

- 各 $i \in I$ について $\mathscr{F}(U_i)$ の対象 ξ_i
- 各 $i, j \in I$ について $\mathscr{F}(U_{ij})$ の同型射 $\phi_{ij} \colon \mathrm{pr}_2^* \xi_j \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_1^* \xi_i$

の組 $(\{\xi_i\}, \{\phi_{ij}\})$ であって，任意の $i, j, k \in I$ に対して cocycle condition:

$$\mathrm{pr}_{13}^* \phi_{ik} = \mathrm{pr}_{12}^* \phi_{ij} \circ \mathrm{pr}_{23}^* \phi_{jk} \colon \mathrm{pr}_3^* \xi_k \longrightarrow \mathrm{pr}_1^* \xi_i$$

が成り立つもののこと．このとき $\{\phi_{ij}\}$ を *descent data* という．object with descent data はその descent data を省略して $\{\xi_i\} = (\{\xi_i\}, \{\phi_{ij}\})$ と書くことがある．

被覆 $\mathcal{U}$ に関する U 上の objects with descent data の射 $(\{\xi_i\}, \{\phi_{ij}\}) \to (\{\eta_i\}, \{\psi_{ij}\})$ とは,

- 各 $i \in I$ について $\mathscr{F}(U_i)$ の射 $\alpha_i \colon \xi_i \to \eta_i$

の族 $\{\alpha_i\}_i$ であって，任意の $i, j \in I$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{pr}_2^* \xi_j \arrow[r, "\mathrm{pr}_2^* \alpha_j"] \arrow[d, "\phi_{ij}"'] & \mathrm{pr}_2^* \eta_j \arrow[d, "\psi_{ij}"] \\
\mathrm{pr}_1^* \xi_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_1^* \alpha_i"'] & \mathrm{pr}_1^* \eta_i
\end{tikzcd}
$$

を可換にするもののこと．

$\mathcal{U}$ に関する objects with descent data とその射のなす圏を $\mathscr{F}(\mathcal{U})$ と表す．この圏を単に descent data のなす圏と言ったりする．

注意 3.5. 被覆 $\mathcal{U}$ に関する descent data の圏 $\mathscr{F}(\mathcal{U})$ は，$\mathscr{F}$ の cleavage と pullback U_{ij}, U_{ijk} の選び方に依存するが，up to iso. で一意的に定まる．

被覆 $\mathcal{U} = \{U_i \xrightarrow{\sigma_i} U\}_i \in \mathrm{Cov}(U)$ があるとき，関手

$$E = E(\mathscr{F};\mathcal{U})\colon \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathcal{U})$$

が次のようにして定まる．

- $\mathscr{F}(U)$ の対象 ξ に対して，$\sigma_i^*\xi \in \mathscr{F}(U_i)$ と，$\mathrm{pr}_2^*\sigma_j^*\xi$ と $\mathrm{pr}_1^*\sigma_i^*\xi$ が ξ の U_{ij} への pullback であることから得られる $\mathscr{F}(U_{ij})$ の同型

$$\phi_{ij}\colon \mathrm{pr}_2^*\sigma_j^*\xi \longrightarrow \mathrm{pr}_1^*\sigma_i^*\xi$$

  の組 $(\{\sigma_i^*\xi\}, \{\phi_{ij}\})$ を対応させる．
- $\mathscr{F}(U)$ の射 $\alpha\colon \xi \to \eta$ に対して，$\mathscr{F}(U_i)$ の射 $\sigma_i^*\alpha\colon \sigma_i^*\xi \to \sigma_i^*\eta$ の族 $\{\sigma_i^*\alpha\}_i$ を対応させる．

この関手 E の構成も，cleavage や pullback の選び方に (up to iso. で) 依存しない．

こうした選択依存性を回避したいと思うのであれば，sieve を用いるのがよい．

被覆 $\mathcal{U} = \{U_i \xrightarrow{\sigma_i} U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して，$\mathcal{U}$ に付随する sieve $h_{\mathcal{U}} \subseteq h_U$ を考える．このとき Grothendieck 構成によって対応するファイバー圏は，$\int h_U = \mathscr{C}/U$ の充満部分圏

$$\mathscr{C}/\mathcal{U} \coloneqq \int h_{\mathcal{U}} = \{(T \to U) \in \mathscr{C}/U \mid T \to U \text{ はある } U_i \to U \text{ を通じて分解する } \} \subseteq \mathscr{C}/U$$

になる．以降，Grothendieck 構成によって対応する対象を同一視して，$h_U = \mathscr{C}/U, h_{\mathcal{U}} = \mathscr{C}/\mathcal{U}$ と書く．

さてこのとき，関手 $\Theta\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(h_{\mathcal{U}}, \mathscr{F}) \to \mathscr{F}(\mathcal{U})$ を

- $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(h_{\mathcal{U}}, \mathscr{F})$ の対象 $G\colon h_{\mathcal{U}} \to \mathscr{F}$ に対して，
  - 各 $i \in I$ について，$G(U_i \xrightarrow{\sigma_i} U) \in \mathscr{F}(U_i)$
  - 各 $i, j \in I$ について，$h_{\mathcal{U}}$ の射 $\mathrm{pr}_2\colon (U_{ij} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} U_j \xrightarrow{\sigma_j} U) \to (U_j \xrightarrow{\sigma_j} U)$ を考えるとこれは cartesian 射だから，$G(\mathrm{pr}_2)\colon G(U_{ij}, \sigma_{ij}) \to G(U_j, \sigma_j)$ も cartesian 射で，よって $\mathscr{F}(U_{ij})$ の同型 $\mathrm{pr}_2^*G(U_j, \sigma_j) \cong G(\sigma_{ij})$ が存在する．このとき，合成 $\mathrm{pr}_2^*G(U_j, \sigma_j) \cong G(\sigma_{ij}) \cong \mathrm{pr}_1^*G(U_i, \sigma_i)$ を ϕ_{ij} とする

  の組 $(\{G(U_i, \sigma_i)\}, \{\phi_{ij}\})$ を対応させる
- $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(h_{\mathcal{U}}, \mathscr{F})$ の射 $\rho\colon F \to G$ に対して，
  - $\mathscr{F}(U_i)$ の射 $\rho_{(U_i,\sigma_i)}\colon F(U_i, \sigma_i) \to G(U_i, \sigma_i)$

  の族 $\{\rho_{(U_i,\sigma_i)}\}$ を考えると，普遍性よりこれは $\mathscr{F}(\mathcal{U})$ の射となる

によって定める．

定理 3.6. 上で構成した関手

$$\Theta\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(h_{\mathcal{U}}, \mathscr{F}) \to \mathscr{F}(\mathcal{U})$$

は圏同値である．

Proof. □

定理 3.6 において，U 上の被覆 $\mathcal{U}$ として特に $\mathcal{U} = \{U \xrightarrow{\mathrm{id}_U} U\}$ を考えると，圏同値 Θ は 2-米田の補題 (定理 2.45) の圏同値と一致する．この意味で，定理 3.6 は米田の補題の一般化である．

また，この定理 3.6 により，descent data の圏は $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(h_{\mathcal{U}}, \mathscr{F})$ で定義してもよいことがわかる．この圏は cleavage や pullback の選択に依らない．

この圏同値は

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "E"] \arrow[d, "\Xi"', "\wr"] & \mathscr{F}(\mathcal{U}) \arrow[d, "\Xi"', "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(h_U, \mathscr{F}) \arrow[r, "\iota^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(h_{\mathcal{U}}, \mathscr{F})
\end{tikzcd}$$

を up to iso. で可換にする．ただし左辺は米田の補題の圏同値である．

∵) $u \in \mathscr{F}(U)$ と $(T \xrightarrow{t} U) \in h_{\mathcal{U}}$ に対して，

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, dashed, "t_i"'] & & U \\
& U_i \arrow[ur, "\sigma_i"'] &
\end{tikzcd}$$

と分解するとすると

$$(\Xi \circ E(u))(T, t) = (\Xi(\{\sigma_i^* u\}))(T, t) = t_i^* \sigma_i^* u \cong t^* u = \Xi(u)(\iota(t)) = (\iota^* \circ \Xi(u))(T, t)$$

となり，これは (T, t) について自然で，さらに u について自然だから

$$\Xi \circ E \cong \iota \circ \Xi$$

とわかる．

これは命題 1.14 の一般化である．

3.3 スタック

定義 3.7. $\mathscr{C}$ を site，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏とする．

(i) $\mathscr{F}$ が $\mathscr{C}$ 上の**プレスタック** (*prestack*) であるとは，任意の $U \in \mathscr{C}$ とその被覆 $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して関手

$$E \colon \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathcal{U})$$

が充満忠実であるときをいう．

(ii) $\mathscr{F}$ が $\mathscr{C}$ 上の**スタック** (*stack*) であるとは，任意の $U \in \mathscr{C}$ とその被覆 $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して関手

$$E \colon \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathcal{U})$$

が圏同値であるときをいう．

> **命題 3.8.** $\mathscr{C}$ を site，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏とするとき，$\mathscr{F}$ が prestack であることは，任意の $S \in \mathscr{C}$ と $\xi, \eta \in \mathscr{F}(S)$ に対して $\underline{\mathrm{Hom}}_S(\xi, \eta) \colon (\mathscr{C}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ が層となることと同値である．

Proof. □

> **定義 3.9.** $\mathscr{C}$ を site，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏とする．被覆 $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ に関する object with descent data $(\{\xi_i\}, \{\phi_{ij}\}) \in \mathscr{F}(\mathcal{U})$ が effective であるとは，ある $\xi \in \mathscr{F}(U)$ が存在して $E(\xi) \cong (\{\xi_i\}, \{\phi_{ij}\})$ となるときをいう．

> **命題 3.10.** $\mathscr{C}$ を site，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏とする．$\mathscr{F}$ が stack であることは，二条件
>
> (i) 任意の $S \in \mathscr{C}$ と $\xi, \eta \in \mathscr{F}(S)$ に対して $\underline{\mathrm{Hom}}_S(\xi, \eta) \colon (\mathscr{C}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ は層である
> (ii) 任意の $U \in \mathscr{C}$ とその被覆 $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して $\mathscr{F}(\mathcal{U})$ の対象は effective である
>
> をみたすことと同値である．

Proof. 定義と命題 3.8 より明らかである． □

> **命題 3.11.** $\mathscr{C}$ を site，$F \colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ を前層とすると，Grothendieck 構成によって $\mathscr{C}$ 上の category fibered in sets $\int F$ が対応する．このとき，$\int F$ が prestack/stack であることは，F が separated presheaf/sheaf であることと同値である．

Proof. □

$\mathscr{C}$ を site とし，$\mathcal{U} = \{U_i \xrightarrow{\sigma_i} U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ を $U \in \mathscr{C}$ の被覆とする．$\mathscr{C}$ 上のファイバー圏の間の cartesian functor $F \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ に対して，関手

$$F_{\mathcal{U}} \colon \mathscr{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathscr{G}(\mathcal{U})$$

が

- $\mathscr{F}(\mathcal{U})$ の対象 $(\{\xi_i\}, \{\phi_{ij}\})$ に対し，
- $\mathscr{F}(\mathcal{U})$ の射 $\{\alpha_i\} \colon (\{\xi_i\}, \{\phi_{ij}\}) \to (\{\eta_i\}, \{\psi_{ij}\})$ に対し，

によって定まる．さらに cartesian functor の間の base-preserving な自然変換 $\rho \colon F \to G$ に対して，自然変換

$$\rho_{\mathcal{U}} \colon F_{\mathcal{U}} \longrightarrow G_{\mathcal{U}}$$

が

- $\mathscr{F}(\mathcal{U})$ の対象 $(\{\xi_i\}, \{\phi_{ij}\})$ に対し，$\rho_{\mathcal{U}}(\{\xi_i\}, \{\phi_{ij}\}) = \{\rho(\xi_i) \colon F\xi_i \to G\xi_i\}_i$ とする

によって定まる．これらの対応は 2-functor

$$(-)_{\mathcal{U}} \colon \mathsf{Fib}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathsf{Cat}$$

を与える．特に，F が同値関手ならば $F_{\mathcal{U}}$ は圏同値になる．

補題 3.12. $\mathscr{C}$ を site，$\mathcal{U} = \{U_i \xrightarrow{\sigma_i} U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ を $U \in \mathscr{C}$ の被覆，$F \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ を $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏の間の cartesian functor とする．このとき

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "E"] \arrow[d, "F_U"'] & \mathscr{F}(\mathcal{U}) \arrow[d, "F_{\mathcal{U}}"] \\ \mathscr{G}(U) \arrow[r, "E"'] & \mathscr{G}(\mathcal{U}) \end{tikzcd}$$

は up to iso. で可換になる．

Proof. □

命題 3.13. $\mathscr{C}$ を site，$\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ を U の被覆とする．

(i) $F \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ をファイバー圏の同値関手とするとき，$\mathscr{F}(U) \xrightarrow{E} \mathscr{F}(\mathcal{U})$ が圏同値ならば $\mathscr{G}(U) \xrightarrow{E} \mathscr{G}(\mathcal{U})$ も圏同値である．

(ii) ファイバー圏 $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ に対して $\mathscr{F} \simeq \mathscr{G}$ のとき，$\mathscr{F}$ が stack ならば $\mathscr{G}$ も stack である．

Proof. □

3.4 Grothendieck プレ位相に対する相対性

系 3.14. $\mathscr{C}$ を site とする．$\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{F}$ が stack であることは，任意の $U \in \mathscr{C}$ とその被覆 $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ に対し $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(h_U, \mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(h_{\mathcal{U}}, \mathscr{F})$ が全単射であることと同値である．

Proof. □

補題 3.15. $(\mathscr{C}, \mathcal{T})$ を site，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{C}$ 上の prestack，$\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subseteq h_U$ を $\mathcal{T}$ の covering sieve とする．$\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ のとき，誘導される関手 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathcal{S}, \mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathcal{S}', \mathscr{F})$ は忠実である．

Proof. □

命題 3.16. $(\mathscr{C}, \mathcal{T})$ を site とする．$\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathscr{F}$ に対して, $\mathscr{F}$ が prestack/stack であることは，任意の $\mathcal{T}$ の covering sieve $\mathcal{S} \subseteq h_U$ に対し $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(h_U, \mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fib}(\mathscr{C})}(\mathcal{S}, \mathscr{F})$ が充満忠実/圏同値であることと同値である．

Proof. □

命題 3.17. 圏 $\mathscr{C}$ 上の Grothendieck プレ位相 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ について $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}'$ であるとする．このとき $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{F}$ が $\mathcal{T}'$ に関して prestack/stack ならば $\mathcal{T}$ に関しても prestack/stack である．

Proof. □

補題 3.18. $\mathscr{C}$ を site，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{C}$ 上の prestack とする．被覆 $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathrm{Cov}(U)$ に対し $\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ の細分であるとき，$\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(\mathcal{V})$ が圏同値ならば $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(\mathcal{U})$ も圏同値になる．

Proof. □

3.5 部分スタック

定義 3.19. site $\mathscr{C}$ 上の stack $\mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{F}$ の**部分スタック** (*substack*) とは，$\mathscr{F}$ のファイバー部分圏 $\mathscr{G}$ であって $\mathscr{C}$ 上 stack となるもののこと．

例 3.20. $\mathscr{C}$ を site，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{C}$ 上の stack とする．$\mathscr{F}$ の充満部分圏 $\mathscr{G}$ が

- $\mathscr{F}$ の cartesian 射 $u \to v$ に対し，$v \in \mathscr{G}$ ならば $u \in \mathscr{G}$ である
- 任意の被覆 $\{U_i \xrightarrow{\sigma_i} U\}_i \in \mathrm{Cov}(U)$ と $u \in \mathscr{F}(U)$ に対し，各 i で $\sigma_i^* u \in \mathscr{G}$ であるならば $u \in \mathscr{G}$ となる

をみたすとすると，$\mathscr{G}$ は $\mathscr{F}$ の substack になる．

命題 3.21. $\mathscr{C}$ を site，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{C}$ をファイバー圏とすると，$\mathscr{F}$ に付随して category fibered in groupoids $\mathscr{F}_{\mathrm{cart}}$ が存在する．このとき，次が成り立つ．

(i) $\mathscr{F}$ が stack ならば，$\mathscr{F}_{\mathrm{cart}}$ も stack である．
(ii) $\mathscr{F}$ が prestack で $\mathscr{F}_{\mathrm{cart}}$ が stack ならば，$\mathscr{F}$ は stack になる．

Proof. □

3.6 降下理論

3.6.1 可換環上の加群に対する降下 *

A を可換環とし，A-加群のなす圏を Mod_A で表す．この対応 $A \mapsto \mathsf{Mod}_A$ は自然に可換環の圏 Ring 上の pseudo-functor $\mathsf{Mod}\colon \mathsf{Ring}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Cat}$ をなし，Grothendieck 構成によって Ring 上のファイバー圏が得られる．このファイバー圏も $\mathsf{Mod} \xrightarrow{\pi} \mathsf{Ring}$ と表す．このとき，ファイバー圏

Mod は Ring の適当な位相で stack となることが知られている．本小節ではこの事実を部分的に確認する．

いくつか記号を定めておく．

(To be added...)

定理 3.22. A-代数 B に対して，B が A 上忠実平坦であるとき

$$E\colon \mathsf{Mod}_A \longrightarrow \mathsf{Mod}_{A\to B}$$

は圏同値である．

Proof. □

3.6.2 準連接層に対する降下 *

S をスキームとする．S-スキーム U に対して U 上の準連接層のなす圏 $\mathsf{Qcoh}(U)$ を対応させると，この対応は Sch/S 上の pseudo-functor Qcoh をなし，Grothendieck 構成によって Sch/S 上のファイバー圏が得られる．このファイバー圏も Qcoh と表す．このとき次が成り立つ．

定理 3.23. スキーム S に対して，Sch/S 上のファイバー圏 Qcoh は fpqc topology に関して stack となる．

本小節ではこれを証明する．

補題 3.24. Zariski stack $\mathscr{F} \to \mathsf{Sch}/S$ に対して，圏同値 $\mathscr{F}(\emptyset) \simeq \{*\}$ が成り立つ．

Proof. □

補題 3.25. S-スキーム $U_i \in \mathsf{Sch}/S$ について $V = \coprod_i U_i \in \mathsf{Sch}/S$ とおく．このとき Zariski stack $\mathscr{F} \to \mathsf{Sch}/S$ に対して，圏同値 $\mathscr{F}(V) \simeq \prod_i \mathscr{F}(U_i)$ が成り立つ．

Proof. □

定理 3.23 の証明には，定理 1.34 の一般化である次の判定法を用いる．

定理 3.26. Sch/S 上のファイバー圏 $\mathscr{F}$ に対して

(i) $\mathscr{F}$ は Zariski stack である

(ii) 任意のアファイン S-スキームの間の忠実平坦射 $f\colon V \to U$ に対し

$$E\colon \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{F}(\{V \xrightarrow{f} U\})$$

は圏同値である

が成り立つとする．このとき，$\mathscr{F}$ は fpqc stack である．

Proof. 証明をいくつかの段階に分けて考える．

Step 1: ($\mathscr{F}$ は fpqc prestack である)

任意の $(T \to S) \in \mathsf{Sch}/S$ と $\xi, \eta \in \mathscr{F}(T)$ に対して □

以上の準備のもと，定理 3.23 を証明しよう．

Proof of theorem 3.23. □

3.6.3 スキームの射の性質に対する降下 *

$\mathscr{C}$ を site，$\mathcal{P} \subseteq \mathrm{mor}(\mathscr{C})$ を射の stable な性質とする．例 2.20 で見たように，$\mathcal{P}$ から $\mathscr{C}$ 上のファイバー圏 $\mathsf{Arr}(\mathcal{P})$ が得られる．このとき，次の一般的な主張が成り立つ．

命題 3.27. $\mathscr{C}$ を subcanonical site，$\mathcal{P} \subseteq \mathrm{mor}(\mathscr{C})$ を射の stable な性質とするとき，ファイバー圏 $\mathsf{Arr}(\mathcal{P}) \to \mathscr{C}$ は prestack である．

Proof. □

しかし，命題 3.27 の状況下であっても，$\mathsf{Arr}(\mathcal{P})$ は stack になるとは限らない．object with descent data の effective 性はかなり delicate な問題となる．

A　スキーム論より

A.1　スキームの射の性質 *

定義と基本的な性質のみ，証明なしでまとめておく．

定義 A.1. スキームの射 $f \colon X \to Y$ が *locally of finite presentation* であるとは，

- 任意の $x \in X$ に対して，x のアフィン開近傍 $U \subseteq X$ と $f(U) \subseteq V$ なる $f(x)$ のアフィン開近傍 $V \subseteq Y$ が存在して，$\mathcal{O}_X(U)$ は有限表示 $\mathcal{O}_Y(V)$-代数になる．

をみたすときをいう．

命題 A.2.
(i) locally of finite presentation な射は，合成で閉じる
(ii) locally of finite presentation な射は，base change で安定である．
(iii) $f \colon X \to Y$ を locally of finite presentaion な射とするとき，任意のアフィン開集合 $U \subseteq X$ と $f(U) \subseteq V$ なる任意のアフィン開集合 $V \subseteq Y$ に対して，$\mathcal{O}_X(U)$ は有限表示 $\mathcal{O}_Y(V)$-代数になる．

定義 A.3. スキームの射 $f \colon X \to Y$ が *quasi-compact* であるとは，

- 任意の quasi-compact な開集合 $V \subseteq Y$ に対して，$f^{-1}(V) \subseteq X$ は quasi-compact である

をみたすときをいう．

命題 A.4. スキームの射 $f\colon X \to Y$ に対して，次は同値である．

(i) f は quasi-compact 射である．
(ii) 任意のアフィン開集合 $V \subseteq Y$ に対して，$f^{-1}(V)$ は quasi-compact である．
(iii) Y のアフィン開被覆 $\{V_i\}_i$ であって，各 i で $f^{-1}(V_i)$ が quasi-compact であるものが存在する．

特に，quasi-compact なスキームからアフィンスキームへの射はすべて quasi-compact 射である．

命題 A.5. (i) quasi-compact な射は，合成で閉じる．
(ii) quasi-compact な射は，base change で安定である．

定義 A.6. スキームの射 $f\colon X \to Y$ が**平坦** (*flat*) であるとは，

- 任意 $x \in X$ に対して，$\mathcal{O}_{X,x}$ は平坦 $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-加群である

をみたすときをいう．

命題 A.7. スキームの射 $f\colon X \to Y$ に対して，次は同値である．

(i) f は平坦射である．
(ii) 任意の $x \in X$ に対して，x のアフィン開近傍 $U \subseteq X$ と $f(U) \subseteq V$ なる $f(x)$ のアフィン開近傍 $V \subseteq Y$ が存在して，$\mathcal{O}_X(U)$ は平坦 $\mathcal{O}_Y(V)$-加群になる．
(iii) 任意のアフィン開集合 $U \subseteq X$ と $f(U) \subseteq V$ なる任意のアフィン開集合 $V \subseteq Y$ に対して，$\mathcal{O}_X(U)$ は平坦 $\mathcal{O}_Y(V)$-加群になる．

命題 A.8. (i) flat な射は，合成で閉じる．
(ii) flat な射は，base change で安定である．

定義 A.9. スキームの射 $f\colon X \to Y$ が**忠実平坦** (*faithfully flat*) であるとは，f が全射な平坦射であるときをいう．

命題 A.10. 環準同型 $A \to B$ に対して，

$$B \text{ は } A \text{ 上忠実平坦である} \iff \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A) \text{ は忠実平坦射である．}$$

参考文献

[SGL] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: a first introduction to topos theory*. Springer-Verlag, 1992.

[Ols16] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.

[Rie16] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Dover Publications, Inc., 2016. http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf.

[Str21] Thomas Streicher. *Fibered Categories à la Jean Bénabou*. arXiv Preprint, 2021. https://arxiv.org/abs/1801.02927.

[Vis08] Angelo Vistoli. *Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*. In: *Fundamental algebraic geometry: Grothendieck's FGA explained*. Mathematical Surveys and Monographs 123, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1–104, 2005; Version of October 2, 2008. http://homepage.sns.it/vistoli/descent.pdf.

[SGA1] Alexander Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, année 1960-61 (SGA1), LNM 224 Springer Heidelberg 1971. (updated version with comments by M. Raynaud: https://arxiv.org/abs/math/0206203)

[SGA4] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, année 1963-64 (SGA4); second edition published as Lecture Notes in Mathematics, vols. 269, 270 and 305, Springer-Verlag, 1972.

[Uemura] Taichi Uemura. "Grothendieck ファイブレーション", Category Theory Advent Calender 2017 の 17 日目の記事. https://uemurax.github.io/pdfs/grothendieck-fibrations-ja.pdf.