一般化元の考え方 *

@paper3510mm†

2019 年 12 月 1 日

概要

代数構造はしばしば，可換図式を用いて圏論的に表現できます．したがってその図式を使えば，集合の圏だけでなくより一般の圏の内部でも代数を考えることができます．しかし，台集合をもつような代数とは異なり，一般の圏では “代数” から元を取ることはできません．それゆえ，すべて可換図式による議論となり，ある性質を証明する際も巨大で複雑な可換図式をたくさん書かねばなりません．この記事では，台集合をもつ代数での等式変形を，一般化元の見方から一般の圏の代数での証明に読み変えることで，可換図式を描かずに証明を行う原理を紹介します．

元ネタは，Riehl による context 本 [2] の Remark 3.4.15 (on generalized elements) で紹介された，“Doing without diagrams” [1] です．著者は『ベーシック圏論』で有名な Leinster です．1 節から 4 節まではほとんど [1] の日本語訳みたいなものなので，英語に抵抗がなければこのオリジナルを読むこともお勧めします．5 節では，代数幾何で見られる functor of points の発想との関連を考察します．

前提知識は主に米田の補題程度です．5 節ではスキーム論に馴染みのある読者を想定します．

目次

1 (通常の) 元

集合 X に対して，その要素を X の元ともいう．一元集合を $1 = \{*\}$ とするとき，集合 X について自然な全単射

$$X \cong \mathrm{Hom}(1, X)$$

* C96 頒布 “B.PROJECT vol.2” に寄稿した記事です

† Twitter: https://twitter.com/paper3510mm

が存在することから，X の元は 1 から X への写像と同一視できる．この全単射のもと，$x \in X$ が $\bar{x}\colon 1 \to X; * \mapsto x$ に対応するとする．写像 $f\colon X \to Y$ があるとき，

$$1 \xrightarrow{\bar{x}} X \xrightarrow{f} Y; * \mapsto x \mapsto f(x)$$

であるから

$$f \circ \bar{x} = \overline{f(x)}$$

が成り立つ．写像 $\bar{x}$，$\overline{f(x)}$ を元 $x \in X$，$f(x) \in Y$ と同一視すれば，

$$f \circ x = f(x)$$

と書き表すことができる．つまり f に x を代入することは，x を合成することだと思える．しばしば $fx \coloneqq f \circ x = f(x)$ という記法が用いられるが，合成を取ったものとも元を代入したものとも考えることができる．

このように，元とは写像の特別なものであり，代入とは合成の特別なものである．

2 一般化元

写像 (射) も合成も，圏の枠組みで扱えるものであり，ゆえに前節の観察は容易に一般の圏において抽象化される．

圏 $\mathscr{C}$ の対象 X について，X の一般化元 (generalized element) とは，codomain に X をもつ $\mathscr{C}$ の射のことである．特に $\mathscr{C}$ の射 $x\colon S \to X$ を，S 型の元 (element of shape S) または S-元 (S-element) といい，

$$x \in_S X$$

とかく．

例．
- $\mathscr{C} = \mathsf{Set}$ において，集合 X の 1-element は，X の通常の元のこと．
- $\mathscr{C} = \mathsf{Top}$ において，一点からなる位相空間を 1 で表すとき，位相空間 X の 1-element は X の点のこと．標準 n 単体を $\Delta^n \in \mathsf{Top}$ とすると，X の Δ^n-element は X の n-単体のこと．このように S-元は，「S 型の図形」と思える．
- $\mathscr{C} = \mathsf{Grp}$ において，自明な群を 1 で表すと，群 X に対して 1-element は唯一つしかない．X の $\mathbb{Z}$-element が通常の元である．$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$-element を考えれば，X の位数 1 または 7 の元が得られる．

集合の間の写像 $X \to Y$ は，X の通常の元による代入を受けて Y の通常の元を返す対応であった．前節で，代入は一種の合成であることを確認した．一般の圏でも同じように考えることができる．圏 $\mathscr{C}$ の射 $f\colon X \to Y$ は，X の S-element $x\colon S \to X$ と合成されて Y の S-element $fx\colon S \to Y$ を返す．集合の間の写像との類似から $fx = f(x)$ と書いてもよいだろう．

圏の射を一般化元の間の対応と思うとき，集合の間の写像と似たような性質をもつことがある．たとえば，集合の間の写像は，domain の元に対するふるまい方によって決定される．つまり集合

の間の写像 $f, g\colon X \to Y$ について，すべての $x \in X$ で $f(x) = g(x)$ が成り立つなら，$f = g$ となる．類似のことが一般の圏と一般化元に対しても成立する．

命題 1. 圏 $\mathscr{C}$ の射 $f, g\colon X \to Y$ について，

$$f = g \iff \text{任意の } X \text{ の一般化元 } x \text{ に対し } fx = gx.$$

Proof. ($\Rightarrow$) は明らか．($\Leftarrow$) は，x として X-element $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ をとればわかる． □

一般に圏の対象は (集合に構造をのせた形態だとは限らないので) 元を持たない．しかし，その対象への射たちを元だと思おうというのが，一般化元の考え方である．圏論の基本定理である米田の補題は，対象 $X, Y \in \mathscr{C}$ について，$S \in \mathscr{C}$ について自然な同型 $\mathrm{Hom}(S, X) \cong \mathrm{Hom}(S, Y)$ があるとき $X \cong Y$ が成り立つことを主張するが，これは圏の対象が一般化元たちによって決まると言うことである．集合がその元によって決まるということを述べるのが (ZF 集合論における) 外延性公理であるが，米田の補題はいわば外延性公理の圏論版であり，このことは一般化元の ‘対象の元’ としての妥当性を補強する．

3 一般化元のふるまい

一般化元をもう少し観察してみよう．

例 2 (直積)**.** たとえば，二つの対象の直積の一般化元はどんなものであろうか．

集合圏 Set において，集合 X, Y の直積 $X \times Y$ は，X の元と Y の元の組を集めた集合であった．

一般の圏 $\mathscr{C}$ においても，対象 $X, Y \in \mathscr{C}$ の直積 $X \times Y$ の一般化元は，X の一般化元と Y の一般化元の組であっていてほしい．つまり $S \in \mathscr{C}$ に対して，$S \to X \times Y$ は組 $(S \xrightarrow{x} X, S \xrightarrow{y} Y)$ と対応していてほしいが，これはまさに対象の直積の定義そのものである：

$$\begin{tikzcd} & X \\ S \arrow[ur, "x"] \arrow[r, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, "y"'] & X \times Y \arrow[u] \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$

射 $x\colon S \to X$，$y\colon S \to Y$ に対して，直積の普遍性から誘導される一意的な射を $(x, y)\colon S \to X \times Y$ と書くことにすれば，定義により $X \times Y$ の一般化元は，$x \in_S X$，$y \in_S Y$ を用いて $(x, y) \in_S X \times Y$ と表せる．三つ以上の対象の直積についても同様である．

例 3 (二項演算)**.** 直積をもつ圏 $\mathscr{C}$ を考える．一般化元 $x, y \in_S X$ をとるとき，射 $\mu\colon X \times X \to X$ に対して $\mu(x, y)$ は何を表すだろうか．

例 2 でみたように，(x, y) は $X \times X$ の S-element で，$x, y \in_S X$ に対応するものであった．圏論的には $\mu(x, y)$ は，単なる合成射 $S \xrightarrow{(x,y)} X \times X \xrightarrow{\mu} X$ のことであるが，射 μ に一般化元 (x, y)

を代入して得られた X の一般化元とみなせる．μ は X の一般化元 x, y を受けて X の一般化元 $\mu(x,y)$ を返す関数といえる．

$\mathscr{C}$ が集合圏 Set のときは μ はまさしく集合 X 上の二項演算であるから，一般の圏 $\mathscr{C}$ においても $xy \coloneqq x \cdot y \coloneqq \mu(x,y)$ という記法を用いることにする．

例 4 (直積射)**.** 直積をもつ圏 $\mathscr{C}$ を考える．射 $f\colon X \to X'$，$g\colon Y \to Y'$ があると，その直積射 $f \times g\colon X \times Y \to X' \times Y'$ が得られる．このとき任意の一般化元 $x \in_S X$，$y \in_S Y$ に対して

$$(f \times g)(x,y) = (f(x), g(y)) \in_S X' \times Y'$$

である．これは，図式

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "f"] & X' \\
S \arrow[r, "{(x,y)}"] \arrow[d, equal] & X \times Y \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "f \times g"] & X' \times Y' \arrow[u] \arrow[d] \\
S \arrow[r, "y"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

を考えれば，中央の行の射の一意性からわかる．

例 5. 直積をもつ圏 $\mathscr{C}$ を考える．$\mathscr{C}$ の射 $\mu\colon X \times X \to X$ に対して

$$\nu \coloneqq X \times X \times X \xrightarrow{\mu \times \mathrm{id}_X} X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

と置く．このとき任意の一般化元 $x, y, z \in_S X$ に対して

$$\nu(x,y,z) = (xy)z$$

である．

Proof. 記法の定義を思い出せば，

$$\begin{aligned}
\nu(x,y,z) &= \mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_X) \circ (x,y,z) \\
&= \mu \circ (\mu(x,y), \mathrm{id}_X(z)) = \mu \circ (xy, z) \\
&= \mu(xy, z) = (xy)z.
\end{aligned}$$

□

例 6. 直積をもつ圏 $\mathscr{C}$ を考える．$\mathscr{C}$ の射 $\mu\colon X \times X \to X$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd}
X \times X \times X \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times \mathrm{id}_X"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\
X \times X \arrow[r, "\mu"'] & X
\end{tikzcd}$$

が可換であることと

$$\forall S \in \mathscr{C}, \quad \forall x, y, z \in_S X, \quad (xy)z = x(yz)$$

が成り立つことが同値である．

Proof. 命題 1 より

$$\text{主張の図式が可換} \iff \forall S \in \mathscr{C},\ \forall w \in_S X \times X \times X,\ \mu(\mu \times \mathrm{id}_X)w = \mu(\mathrm{id}_X \times \mu)w$$

である．直積 $X \times X \times X$ の一般化元 w は，X の一般化元 x, y, z を用いて $w = (x, y, z)$ と書けて，例 5 より

$$\mu(\mu \times \mathrm{id}_X)(x, y, z) = (xy)z, \quad \mu(\mathrm{id}_X \times \mu)(x, y, z) = x(yz)$$

となることから，主張が従う． □

例 6 などのように，一般化元を用いれば可換図式が等式によって置き換えられることがわかる．これを応用すれば，圏の internal algebra の定義を，可換図式ではなく等式を用いて表せる．

たとえば，直積をもつ圏 $\mathscr{C}$ における (internal) group を考えよう．ここで $\mathscr{C}$ は特に empty product として終対象 1 をもつことに注意する．対象 X に対して一意的に存在する 1 への射を $!\colon X \to 1$ と表すことにする．また，射の組 $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)$ によって誘導される射を $\Delta\colon X \to X \times X$ とする：

$$\begin{tikzcd}
 & X \\
X \arrow[ur, "\mathrm{id}_X"] \arrow[r, dashed, "\Delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & X \times X \arrow[u] \arrow[d] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

このとき，通常の群の定義を一般化して，一般に圏の内部で群が定義できる．

定義 7 (図式による定義)**.** 圏 $\mathscr{C}$ における (internal) group とは，

- $\mathscr{C}$ の対象 X
- $\mathscr{C}$ の射 $\mu\colon X \times X \to X$，$\iota\colon X \to X$，$\eta\colon 1 \to X$

の組 (X, μ, ι, η) であって，図式

$$\begin{tikzcd}
X \times X \times X \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times \mathrm{id}_X"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\
X \times X \arrow[r, "\mu"'] & X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \cong X \times 1 \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times \eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] & 1 \times X \cong X \arrow[l, "\eta \times \mathrm{id}_X"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "!"'] & X \times X \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times \iota"] & X \times X \arrow[d, "\mu"] & X \times X \arrow[l, "\iota \times \mathrm{id}_X"'] & X \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[d, "!"] \\
1 \arrow[rr, "\eta"'] & & X & & 1 \arrow[ll, "\eta"]
\end{tikzcd}$$

> が可換であるもののこと．

これを一般化元の等式を用いて表すと次のようになる．

> **定義 8** (等式による定義)．圏 $\mathscr{C}$ における (internal) group とは，
>
> - $\mathscr{C}$ の対象 X
> - $\mathscr{C}$ の射 $\mu\colon X\times X\to X$，$\iota\colon X\to X$，$\eta\colon 1\to X$
>
> の組 (X,μ,ι,η) であって，任意の対象 $S\in\mathscr{C}$ と一般化元 $x,y,z\in_S X$ に対して
>
> $$(xy)z=x(yz),\quad ex=x=xe,\quad x^{-1}x=e=xx^{-1}$$
>
> が成り立つもののこと．ただし $xy=\mu(x,y)$，$e=\eta(!)$，$x^{-1}=\iota(x)$ である．

この等式による定義が，図式による定義と同値であることは，例 6 と同様にして示すことができる．

等式による group の定義を見ればわかるように，通常の元の等式ではなく一般化元の等式であるという違いはあるものの，慣れ親しんだ通常の群の定義とほとんど同じである．群に限らず，集合を台にもつ様々な代数は，このように元の公理を可換図式に翻訳することなく，一般化元の言葉を用いて圏の internal algebra へ一般化できることになる．

しかし図式を等式に置き換えることが，いつも良いことだとは限らないと Leinster [1] はいう：

> Replacing a diagram by an equation isn't *always* a positive step: diagrams can sometimes be topologically or geometrically suggestive, as in the pentagon/associator story. ([1, p.6])

4 Proofs without diagrams

集合を台にもつ通常の群の公理をそのまま一般化元の等式だと思って，圏における group が定義できることをみた．通常の群論での議論を使って，圏における group の性質を示せないだろうか．

実はある程度は可能である．internal group に関する性質を示そうとするとき，可換図式で定義されている場合は巨大な可換図式をたくさん描いて証明するよりほかない．これには大変な労力が必要である．慣れ親しんだ通常の群論の式変形が，そのまま一般化元の等式変形に置き換えることができれば，ずいぶんと楽に証明ができる．

たとえば，通常の群において

$$(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}\tag{1}$$

が成り立つ．これは次のような式変形 (*) で示せる．

$$\begin{aligned}(xy)^{-1} &= (xy)^{-1}e = (xy)^{-1}(xx^{-1}) = (xy)^{-1}((xe)x^{-1}) \\ &= (xy)^{-1}((x(yy^{-1}))x^{-1}) = (xy)^{-1}(((xy)y^{-1})x^{-1}) \\ &= (xy)^{-1}((xy)(y^{-1}x^{-1})) = ((xy)^{-1}(xy))(y^{-1}x^{-1}) \\ &= e(y^{-1}x^{-1}) = y^{-1}x^{-1}\end{aligned} \tag{*}$$

群の公理を用いた変形であることを意識して丁寧に示したが，基本的には $(xy)^{-1} = (xy)^{-1}xyy^{-1}x^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ という変形をしているだけである．

式 (1) の類似を圏 $\mathscr{C}$ の internal group (X, μ, ι, η) で示そう．すなわち，

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[rr, "\mu"] \arrow[d, "\mathrm{sym}"'] & & X \arrow[d, "\iota"] \\ X \times X \arrow[r, "\iota\times\iota"'] & X \times X \arrow[r, "\mu"'] & X \end{tikzcd}$$

が可換であることを示したい．ここで sym は

$$\begin{tikzcd} & X \\ X \times Y \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, dashed, "\mathrm{sym}"] & Y \times X \arrow[u] \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$

で定まる射である．圏論的には図式による定義 7 に現れる可換図式まで分解することで証明を与えることになるが，一般化元の観点から証明してみよう．

まず，上の図式が可換であることと，任意の $S \in \mathscr{C}$ と一般化元 $x, y \in_S X$ に対して

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

が成り立つことは同値である．よって式変形 (*) の九つの等式がそれぞれ一般化元の等式としてでも成り立つことを確認すればよい．たとえば一つ目の等式 $(xy)^{-1} = (xy)^{-1}e$ を考えてみると，等式による定義 8 から明らかに一般化元の意味でも成り立つ．その他の等式も同様に成り立つ．したがって，internal group でも式 (1) の類似が成立することが分かった．

もう少し複雑な例を挙げよう．通常の群において，交換子 (commutator) を $[xy] := xyx^{-1}y^{-1}$ とし，共役 (conjugation) を $x^y := yxy^{-1}$ と定めるとき

$$[xy, z] = [y, z]^x[x, z] \tag{2}$$

が成り立つ．これは次のような式変形 (**) で示せる．

$$\begin{aligned}[xy, z] &= xyz(xy)^{-1}z^{-1} = xyzy^{-1}x^{-1}z^{-1} = x[y, z]zx^{-1}z^{-1} \\ &= x[y, z]x^{-1}[x, z] = [y, z]^x[x, z]\end{aligned} \tag{**}$$

圏 $\mathscr{C}$ の internal group (X,μ,ι,η) に対して，式 (2) の類似を示そう．交換子 $\kappa\colon X\times X\to X$ を合成射

$$X\times X\xrightarrow{\Delta\times\Delta}X\times X\times X\times X\xrightarrow{\mathrm{id}_X\times\mathrm{sym}\times\mathrm{id}_X}X\times X\times X\times X$$
$$\xrightarrow{\mathrm{id}_{X\times X}\times\iota\times\iota}X\times X\times X\times X\xrightarrow{\mu\times\mu}X\times X\xrightarrow{\mu}X$$

とし，共役 $\gamma\colon X\times X\to X$ を合成射

$$X\times X\xrightarrow{\mathrm{id}_X\times\Delta}X\times X\times X\xrightarrow{\mathrm{sym}\times\iota}X\times X\times X\xrightarrow{\mu\times\mathrm{id}_X}X\times X\xrightarrow{\mu}X$$

と定める．このとき，式 (2) の類似の，κ,γ に関する図式が可換であることを示したい (めんどうなので描かない)．

まず定義から，一般化元 $x,y\in_S X$ に対して $\kappa(x,y)=xyx^{-1}y^{-1}$，$\gamma(x,y)=yxy^{-1}$ となることが計算できる (このことから $\kappa=[-,-]$，$\gamma=[-]^{[-]}$ と書いてもよい)．よって示したい図式の可換性は，任意の $S\in\mathscr{C}$ と一般化元 $x,y\in_S X$ に対して

$$[xy,z]=[y,z]^x[x,z]$$

が成り立つことが同値となる．上の式変形 (**) は一般化元の意味でも成り立つから，したがって internal group でも式 (2) の類似が成立することがわかる．

二つ目の例では，もはや図式は現れない．描かれていない図式の可換性を示すためには，通常の集合の元での議論が一般化元の意味でも成立することを確認しさえすればよいのである．Leinster [1] はこれをして “the magic wand” であると締めくくっている．

5　おまけ：Functor of Points

一般化元のふるまいと，可換図式の証明への応用を紹介した．このような一般化元の見方が有効であるのは，米田埋め込み $\mathsf{y}\colon\mathscr{C}\hookrightarrow\mathsf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ の働きのおかげだと思われる．

(locally small な) 圏 $\mathscr{C}$ の対象 X に対して，反変関手 $h_X=\mathrm{Hom}(-,X)\colon\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}$ を対応させることで，$\mathscr{C}$ から $\mathsf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ への関手 $\mathsf{y}\colon\mathscr{C}\hookrightarrow\mathsf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ が定まる．米田の補題によりこの関手 y は充満忠実であり，米田埋め込み (yoneda embedding) と呼ばれる．任意の (locally small な) 圏は，関手圏の中に埋め込んで考えることができる．特に $\mathscr{C}$ の射 $f\colon X\to Y$ を考えたとき，f は自然変換 $\mathsf{y}(f)\colon h_X\to h_Y$ と一対一に対応する．自然変換の実質は $\mathscr{C}$ の対象に対応づけられた成分 (component) の族であるから，$\mathsf{y}(f)$ はその成分である Set の射たち $f_*\colon\mathrm{Hom}(S,X)\to\mathrm{Hom}(S,Y)$ $(S\in\mathscr{C})$ がどんな写像かによって決まる．つまり f の一般化元に対するふるまいによって，射 f が決定するのである．Hom 関手 $\mathrm{Hom}(S,-)$ が極限を保つことにより，直積の一般化元がどのように表せるか簡単にわかることも，要因のひとつであると思う．

似たような見方は，代数幾何学においても用いられている．いわゆる点の関手 (functor of points) の考え方である．

スキームの圏を Sch とする (より一般の圏 $\mathscr{C}$ でも定義は可能である)．スキーム X に対して，関手 $h_X = \mathrm{Hom}(-, X) \colon \mathsf{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ を X の点の関手 (functor of points) といい，$(x \colon S \to X) \in h_X(S) = \mathrm{Hom}(S, X)$ を X の S に値を取る点 (S-valued point) という．なぜ $x \colon S \to X$ が 'X の点' と呼ばれるかは、以下の観察に由来する：もともと，代数幾何の扱う図形とは，多項式の零点からなる集合であった．体 k 上の多項式 $f_1, \ldots, f_m \in k[T_1, \ldots, T_n]$ と k-代数 R に対して，f_i たちの零点集合とは

$$V = \{x \in R^n \mid f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0\}$$

という集合である．$X = \mathrm{Spec}(k[T_1, \ldots, T_n]/\langle f_1, \ldots, f_m \rangle)$，$S = \mathrm{Spec}(R)$ とするとき

$$\begin{aligned} V &\cong \{\varphi \colon k[T_1, \ldots, T_n] \to R \mid \mathrm{Ker}(\varphi) \supseteq \langle f_1, \ldots, f_m \rangle\} \\ &\cong \{\bar{\varphi} \colon k[T_1, \ldots, T_n]/\langle f_1, \ldots, f_m \rangle \to R\} \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ring}}(k[T_1, \ldots, T_n]/\langle f_1, \ldots, f_m \rangle, R) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Aff}}(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{Spec}(k[T_1, \ldots, T_n]/\langle f_1, \ldots, f_m \rangle)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathsf{Sch}}(S, X) \end{aligned}$$

となることから，X の S-valued point とは，環 $k[T_1, \ldots, T_n]/\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ の関係式を定める多項式 f_i の R^n 上の零点に対応する．

米田埋め込み $\mathsf{y} \colon \mathsf{Sch} \to \mathsf{Set}^{\mathsf{Sch}^{\mathrm{op}}}$ を使って，スキームの圏 Sch をより大きな圏に埋め込むことはそれ以上の意味がないように思えるが，Eisenbud-Harris [3] によれば少なくとも三つの点で役に立つ視点である．一つ目は，スキームのいくつかの構成が簡単に記述できるという点である．たとえばスキームのファイバー積は，スキームとして構成するにはやや大変であるが，関手としてはとても簡単にかける．スキーム X と h_X を同一視すれば，S 上のスキーム $h_X \xrightarrow{f} h_S$，$h_Y \xrightarrow{g} h_S$ のファイバー積とは，$T \in \mathsf{Sch}$ に対して集合

$$h_{X \times_S Y}(T) = \{(x, y) \in X(T) \times Y(T) \mid f(x) = g(y) \text{ in } S(T)\}$$

を対応させて得られる関手 $h_{X \times_S Y}$ のことである．二つ目は，あるスキームを構成するのに，その functor of points を定義するほうが簡単な場合が多く，その関手の表現可能性の問題に帰着できる点である．スキームとしての Grassmannian はその典型例であり，Görtz-Wedhorn [4] ではその方針で Grassmannian を定義している．三つ目は，スキームの幾何学的な性質を関手に対する性質へ拡張することで，より広い視点から議論ができるようになるという点である．この観点から，スキームは代数空間 (algebraic space) へとさらに一般化された．

もちろん，前節までに議論した，スキームの点 (すなわち一般化元) を用いて図式の可換性を証明するという手法は，スキーム論でも有効である．たとえば，separated な射の合成がまた separated

となることを示してみよう．スキームの射 $f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta_f"] \arrow[dr, "\Delta_{g\circ f}"'] & X \times_Y X \arrow[r, "f\circ p = f\circ q"] \arrow[d, "(p,q)"] & Y \arrow[d, "\Delta_g"] \\ & X \times_Z X \arrow[r, "f\times f"'] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}$$

を考える．ここで $p\colon X \times_Y X \to X$，$q\colon X \times_Y X \to X$ はファイバー積の射影である．任意の T-valued point $x \in_T X$ に対して，

$$(p,q)(\Delta_f(x)) = (p,q)(x,x) = (p(x,x), q(x,x)) = (x,x) = \Delta_{g\circ f}(x)$$

より $(p,q)\circ\Delta_f = \Delta_{g\circ f}$ となるから，左の三角形は可換である．また任意の $x, x' \in_T X$，$y \in_T Y$ に対して

$$\begin{aligned} ((x,x'),y) \in_T (X \times_Z X) \times_{Y\times_Z Y} Y &\iff (f\times f)(x,x') = \Delta_g(y) \\ &\iff (f(x), f(x')) = (y,y) \\ &\iff f(x) = y = f(x') \\ &\iff (x,x') \in_T X \times_Y X \text{ かつ } y = f(x) \end{aligned}$$

となるから，$X \times_Y X \cong (X \times_Z X) \times_{Y\times_Z Y} Y$ が成り立ち，右の四角形は pullback をなす．したがって，f, g が separated のとき，Δ_f, Δ_g は閉埋め込みであり，閉埋め込みは基底変換で安定であるから (p,q) も閉埋め込みとなり，よって $\Delta_{g\circ f} = (p,q)\circ\Delta_f$ も閉埋め込みとなる．よって $g\circ f$ は separated である．

スキームの圏 Sch を $\mathsf{Set}^{\mathsf{Sch}^{\mathrm{op}}}$ に埋め込んで考えたが，Sch はいくぶん複雑なのでその上の具体的な関手 $\mathsf{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ を圏論的に扱うことはなかなか難しい．そこで少し単純化して関手圏 $\mathsf{Set}^{\mathsf{Aff}^{\mathrm{op}}}$ に埋め込むことも考えられている．ぴあのん [5] では，この埋め込みについて topos 理論の観点から解説がなされている．

参考文献

[1] Tom Leinster. *Doing without diagrams*. 2008.
https://www.maths.ed.ac.uk/~tl/elements.pdf

[2] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Dover Publications, Inc., 2016.
http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf

[3] David Eisenbud and Joe Harris. *The Geometry of Schemes*. Springer-Verlag, 2000.

[4] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic Geometry I: Schemes with examples and exercises*. Viewing+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2010.

[5] ぴあのん (@piano2683). “Schemes from a Functional Viewpoint”. 数学同人誌『Enjoy Mathematics!』，Next Nexus 発行，2018 年 12 月 31 日 (C95 頒布). [*1]

[*1] 2019 年 12 月 1 日現在，BOOTH にて販売されている：https://booth.pm/ja/items/1157480