# 圏の generator について

@paper3510mm*

2020 年 10 月 19 日

**概要**

圏の generator の定義をいくつか見かけるので，まとめておく．

## 目次



## 1 生成子と強生成子，その周辺

圏は locally small であるとする．圏 $\mathcal{S}$ に対して，$\widehat{\mathcal{S}} = [\mathcal{S}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]$ と置く．

圏 $\mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{C}$ の対象から成る**空でない**集合 $S \subseteq \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ の対象の族 (a family of objects) と呼ぶことにする．対象の族 $S$ は自然に，small な充満部分圏 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ と同一視される．

**定義 1.1.**

- 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が faithful であるとは，任意の $\mathcal{C}$ の射 $f, g\colon c \to c'$ に対して，$F(f) = F(g)$ ならば $f = g$ となるときをいう．
- 関手の族 $\{F_i\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}\}_{i \in I}$ が jointly faithful であるとは，任意の $\mathcal{C}$ の射 $f, g\colon c \to c'$ に対して，すべての $i \in I$ で $F_i(f) = F_i(g)$ であるならば $f = g$ となるときをいう．

$\{F_i\}_i = \{F\}$ のときは，$\{F\}$ が jointly faithful であるとは $F$ が faithful であるということ．

**定義-命題 1.2.** 圏 $\mathcal{C}$ の対象の族 $S$ が生成集合 (生成対象の族，a family of generators) であるとは，次の同値な条件をみたすときをいう：

(i) $\mathcal{C}$ の射 $g_1, g_2\colon c \to d$ について，任意の $s \in S$ と任意の $\mathcal{C}$ の射 $f\colon s \to c$ に対して $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ が成り立つならば，$g_1 = g_2$ となる．

* Twitter: https://twitter.com/paper3510mm.

(ii) $\{\mathrm{Hom}(s,-)\}_{s\in S}$ は jointly faithful である．

(iii) 関手 $N\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{S}}; c \mapsto \mathrm{Hom}(-,c)|_{\mathcal{S}^{\mathrm{op}}}$ は faithful である．

さらに $\mathcal{C}$ が余積を持つときは次とも同値である：

(iv) 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して，誘導される射 $\gamma_c\colon \coprod_{s\in S,\, f\colon s\to c} s \to c$ はエピ射である．

(v) 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{C}$ の射の族 $\{f_i\colon s_i \to c\}_{i\in I}$ であって，$s_i \in S$ かつ誘導される射 $\coprod_i s_i \to c$ がエピ射になるようなものが存在する．

*Proof.* 自ら試みられよ．主張していることはすべて，(i) が成り立つということである． □

特に $S = \{G\}$ が生成集合であるとき，$G$ は生成子 (generator) であるという．本稿では，対象の族 $S$ が生成集合であることを，$S$ は faithful であると呼ぶことにする[*1]．

**注意 1.3.** 条件 (i) の対偶

(i′) $\mathcal{C}$ の射 $g_1, g_2\colon c \to d$ について，$g_1 \neq g_2$ ならば，ある $s \in S$ と $\mathcal{C}$ の射 $f\colon s \to c$ が存在して $g_1 \circ f \neq g_2 \circ f$ が成り立つ．

を指して，分離対象の族 (a family of separators) とも呼ばれる [$n$Lab, “Separator”]．

**注意 1.4.** 条件 (iii) の関手は，左 Kan 拡張である：包含関手を $F\colon \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{C}$ とすれば，$N\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{S}}$ は $F$ に沿った米田埋め込み $\mathsf{y}\colon \mathcal{S} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{S}}$ の左 Kan 拡張である．

次に strong generator を定義する．

**定義 1.5.**

- 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が conservative であるとは，$F$ が同型射を反射する，すなわち任意の $\mathcal{C}$ の射 $f\colon c \to c'$ に対して $F(f)$ が同型射ならば $f$ も同型射であるときをいう．
- 関手の族 $\{F_i\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}\}_{i\in I}$ が jointly conservative であるとは，任意の $\mathcal{C}$ の射 $f\colon c \to c'$ に対して，すべての $i \in I$ で $F_i(f)$ が同型射であるならば $f$ も同型射であるときをいう．

$\{F_i\}_i = \{F\}$ のときは，$\{F\}$ が jointly conservative であるとは $F$ が conservative であるということ．

**定義 1.6.** 圏 $\mathcal{C}$ の射 $\gamma\colon c \to d$ が extremal エピ射であるとは，エピ射であって，任意の分解 $\gamma = m \circ g$ に対して $m$ がモノ射ならば $m$ が同型射になるときをいう．

[*1] これは呼び方は [Yua] から採用したものだが，一般的ではないことに注意．他の概念との関係をわかりやすくする意図がある．

**命題 1.7.** 圏 $\mathcal{C}$ において，$\gamma\colon c \to d$ がモノ射かつ extremal エピ射であるならば，$\gamma$ は同型射である．

*Proof.* $\gamma$ がモノ射かつ extremal エピ射であるとき，分解 $\gamma = \gamma \circ \mathrm{id}_c$ があるから，extremal エピ射の定義より $\gamma$ は同型射になる． □

**定義-命題 1.8.** 圏 $\mathcal{C}$ の対象の族 $S$ が強生成集合 (強生成対象の族，a family of strong generators) であるとは，次の同値な条件をみたすときをいう：

(i) $S$ は faithful であって，かつ，$\mathcal{C}$ のモノ射 $m\colon a \rightarrowtail d$ について，任意の $s \in S$ と射 $h\colon s \to d$ に対して $h$ が $m$ を経由して分解するならば，$m$ は同型射である．

(ii) $\{\mathrm{Hom}(s,-)\}_{s\in S}$ は jointly faithful かつ jointly conservative である．

(iii) 関手 $N\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{S}}; c \mapsto \mathrm{Hom}(-,c)|_{\mathcal{S}^{\mathrm{op}}}$ は faithful かつ conservative である．

さらに $\mathcal{C}$ が余積を持つときは次とも同値である：

(iv) 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して，誘導される射 $\gamma_c\colon \coprod_{s\in S,\, f\colon s\to c} s \to c$ は extremal エピ射である．

*Proof.* (ii) ⇔ (iii): $\mathrm{Hom}(s,f) = f\circ - = N(f)(s)$ より

$$\forall\, s \in S,\ \mathrm{Hom}(s,f)\ \text{は同型} \iff N(f)\ \text{は同型}$$

となることから従う．

(i) ⇒ (ii): まず $S$ が faithful だから $\{\mathrm{Hom}(s,-)\}_{s\in S}$ は jointly faithful である．$\mathcal{C}$ の射 $f\colon c \to d$ に対して，

$$\forall\, s \in S,\quad \mathrm{Hom}(s,f) = f\circ -\colon \mathrm{Hom}(s,c) \to \mathrm{Hom}(s,d)\ \text{は同型}$$

であるとする．このとき $s \in S$ と射 $h\colon s \to d$ について，$\mathrm{Hom}(s,f)$ の全単射性より $h = f\circ g'$ となる $g'\colon s \to c$ が一意に存在することに注意する．$f$ は同型であることを示すには，命題 1.7 より $f$ が extremal エピ射かつモノ射であることを示せばよい．

まず $u,v\colon d \to y$ に対して $u\circ f = v\circ f$ が成り立つとする．任意の $s \in S$ と $h\colon s \to c$ について $u\circ h = u\circ f\circ g' = v\circ f\circ g' = v\circ h$ となるから，$S$ が生成集合であることにより $u = v$ が従う．よって $f$ はエピ射である．

次に $f$ がモノ射 $m\colon a \rightarrowtail d$ を通じて $f = m\circ g$ と分解したとする．このとき任意の $s \in S$ と射 $h\colon s \to d$ について $h$ は $h = f\circ g' = m\circ(g\circ g')$ と分解するから，仮定 (i) より $m$ は同型射になる．よって $f$ は extremal エピ射である．

最後に $u,v\colon x \to c$ に対して $f\circ u = f\circ v$ が成り立つとする．任意の $s \in S$ と射 $h\colon s \to d$ について，$f\circ(u\circ h) = f\circ(v\circ h)$ であり，$\mathrm{Hom}(s,f)$ の単射性から $u\circ h = v\circ h$ が成り立つ．よって $S$ が生成集合であることから $u = v$ が従い，$f$ はモノ射となる．

(ii) ⇒ (i): $\{\mathrm{Hom}(s,-)\}_{s\in S}$ が jointly faithful であることから $S$ は faithful である．$m\colon a \rightarrowtail d$ をモノ射とし，任意の $s \in S$ と射 $h\colon s \to d$ に対して $h$ は $m$ を通じて分解するとする．このとき

すべての $s \in S$ について $m \circ -\colon \mathrm{Hom}(s, a) \to \mathrm{Hom}(s, d)$ が全単射であることを示したい．

まず $m$ はモノ射だから，$m \circ -$ は単射である．次に任意の $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(s, d)$ は $m$ を通じて分解するから $m \circ -$ は全射である．

(i) $\Leftrightarrow$ (iv): 定義からすぐにわかる．□

特に $S = \{G\}$ が強生成集合であるとき，$G$ は強生成子 (strong generator) であるという．本稿では，対象の族 $S$ が強生成集合であることを，$S$ は strong であると呼ぶことにする[*2]．

明らかに，対象の族 $S$ に対して $S$ が strong ならば faithful である．

**注意 1.9.** 定義 1.8 の条件 (iv) において，誘導される射 $\gamma_c$ が extremal エピ射であるのだから，強生成集合 $S$ は "a family of extremal generators" と呼ぶべきである．実際，"a family of strong generators" が対応するべき "strong epimorphism" なる概念は別に存在する ([HoCA1] では，$\gamma_c$ が strong epi. となる対象の族を強生成集合と定義している．圏 $\mathcal{C}$ が pullback を持つなら，これらは同値な概念になる)．

しかし，本稿では慣習にのっとり，定義 1.8 を強生成集合の定義に採用した．

ここで，$\mathcal{C}$ が equalizer をもつ場合には強生成集合の定義から jointly faithful 性を落とせることを確認する．

**命題 1.10.** 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が conservative であるとき，$F$ は保存する極限・余極限を反射する．

*Proof.* 余極限に対して示す．small な圏 $J$ に対して $J$ 型の余極限が $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ に存在し，$F$ はこれを保つとする．$\mathcal{C}$ での cocone $\{f_j\colon c_j \to c\}_{j \in J}$ に対して，$\{F(f_j)\colon F(c_j) \to F(c)\}_{j \in J}$ が $\mathcal{D}$ での colimit cocone であるとする．今 $\mathrm{colim}_j\, c_j$ が存在するから

$$\begin{tikzcd} c_j \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \mathrm{colim}_j\, c_j \arrow[r, dashed, "\exists !"'] & c \end{tikzcd}$$

なる射が一意に存在する．この図式を $F$ でうつすと cocone と整合的な射 $F(\mathrm{colim}_j\, c_j) \to F(c)$ が得られる．$F$ が余極限 $\mathrm{colim}_j\, c_j$ を保ち，一方 $\{F(c_j) \to F(c)\}_j$ が colimit cocone であることから，この得られた射 $F(\mathrm{colim}_j\, c_j) \to F(c)$ は同型射である．よって $F$ が conservative であることから，$\mathrm{colim}_j\, c_j \to c$ も同型射であり，したがって $F$ は保存する余極限を反射する．極限の場合も同様である．□

**系 1.11.** Conservative な関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して，$\mathcal{C}$ が equalizer もしくは coequalizer を持ち，$F$ がそれらを保つなら，$F$ は faithful である．

[*2] これも本稿だけの用語である．

*Proof.* $\mathcal{C}$ の射 $f, g\colon c \to d$ について $F(f) = F(g)$ であるとする．例えば $\mathcal{C}$ が coequalizer を持つとすると $f, g$ の coequalizer

$$c \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} d \longrightarrow e$$

が取れる．$F$ はこれを保つから

$$F(c) \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} F(d) \longrightarrow F(e)$$

も coequalizer となる．ここで $F(f) = F(g)$ だから $F(d) \to F(e)$ は同型射となり，$F$ が conservative であることから $d \to c$ も同型射になる．よって $f = g$ となる．equalizer の場合も同様である． □

**系 1.12.** 圏 $\mathcal{C}$ が equalizer を持つとき，対象の族 $S$ に対して，次は同値である．

(i) $S$ は strong である．

(ii) $\{\mathrm{Hom}(s, -)\}_{s \in S}$ は jointly conservative である．

(iii) 関手 $N\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{S}}$ は conservative である．

*Proof.* Hom 関手 $\mathrm{Hom}(s, -)$ はすべての極限を保つから，$\mathcal{C}$ の equalizer も保つ．よって系 1.11 より従う． □

**注意 1.13.** たいていの実用的な圏は有限極限を持つことから，系 1.12 の同値な条件が成り立つ．このことから，系 1.12 の条件 (ii) や (iii) を強生成集合の定義として採用する人も多い．

さて，生成集合と強生成集合が同値になる場合を見てみよう．

**命題 1.14.** 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が faithful ならば，$F$ はモノ射とエピ射を反射する．

*Proof.* $\mathcal{C}$ の射 $f\colon c \to d$ に対して，$F(f)$ がモノ射であるとする．$\mathcal{C}$ の射 $u, v\colon x \to c$ について $f \circ u = f \circ v$ であるとすると，$F(f) \circ F(u) = F(f) \circ F(v)$ となる．今 $F(f)$ はモノ射だから $F(u) = F(v)$ となり，$F$ は faithful だから $u = v$ が成り立つ．よって $f$ もモノ射である．エピ射の場合も同様である． □

**定義 1.15.** 圏 $\mathcal{C}$ が平衡 (balanced) であるとは，任意の射 $f$ に対して $f$ がモノ射かつエピ射ならば同型射になるときをいう．

例えばアーベル圏は balanced である．

**命題 1.16.** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とし，$\mathcal{C}$ は balanced であるとする．このとき $F$ は faithful ならば，conservative である．

*Proof.* $\mathcal{C}$ の射 $f$ に対して $F(f)$ が同型射であるとすると，$F(f)$ はモノ射かつエピ射である．$F$ は

faithful だから，命題 1.14 より $f$ もモノ射かつエピ射となる．$\mathcal{C}$ は balanced だから $f$ は同型射である． □

**系 1.17.** 圏 $\mathcal{C}$ が balanced なとき，対象の族 $S$ に対して

$$S \text{ は faithful である} \iff S \text{ は strong である}$$

が成り立つ．

*Proof.* 命題 1.16 より従う． □

◊ ◊ ◊

圏が加群圏 $\mathcal{C} = \mathsf{Mod}(R)$ の場合を念頭に，次を導入しよう．

**定義 1.18.** 余完備な圏 $\mathcal{C}$ の対象の族 $S$ が表現生成集合 (a family of presenting generators)[*3]であるとは，任意の $c \in \mathcal{C}$ がある平行射 $\coprod_j s_j \rightrightarrows \coprod_i s_i$ $(s_i, s_j \in S)$ の coequalizer で表せるときをいう．ここで $\coprod_j s_j$ と $\coprod_i s_i$ の間の射は，一般に $s_j \to s_i$ という射から誘導されるものとは限らないことに注意せよ．

特に $S = \{G\}$ が表現生成集合であるとき，$G$ は表現生成子 (presenting generator) であるという．本稿では，対象の族 $S$ が表現生成集合であることを，$S$ は presenting であると呼ぶことにする[*4]．

例えば，$R$ は $\mathsf{Mod}(R)$ の presenting generator である．

**命題 1.19.** 圏 $\mathcal{C}$ が余完備なとき，対象の族 $S$ に対して，

$$S \text{ は presenting である} \implies S \text{ は strong である} \implies S \text{ は faithful である}$$

が成り立つ．

*Proof.* $S$ が presenting のとき faithful であることは，定義から明らか．

$S$ が presenting ならば strong であることを示そう．そのためには $\{\mathrm{Hom}(s,-)\}_{s\in S}$ は jointly conservative であることを示せばよい．ここで，$\mathcal{C}$ の射 $w\colon d \to d'$ に対して

$$w \text{ が } S\text{-iso.} :\iff \text{すべての } s \in S \text{ に対し } w \circ -\colon \mathrm{Hom}(s,d) \to \mathrm{Hom}(s,d') \text{ が同型}$$

と定義する．$W = \{S\text{-iso. morphisms}\}$ とおけば，示すべきことは $W = \mathrm{Iso}(\mathcal{C})$ と同値である．

$c \in \mathcal{C}$ に対して

$$\begin{aligned} &c \text{ が } W\text{-local} \\ &:\iff \text{すべての } (w\colon d \to d') \in W \text{ に対し } w \circ -\colon \mathrm{Hom}(c,d) \to \mathrm{Hom}(c,d') \text{ が同型} \end{aligned}$$

[*3] この概念も [Yua] から採用しているが，一般的なものではないことに注意．

[*4] これも，本稿だけの用語である．

と定めるとき，$W$-local な対象の余極限はまた $W$-local になる．

∵) $c \in \mathcal{C}$ に対して $c = \operatorname{colim}_j c_j$ ($c_j$ は $W$-local) であるとする．任意の $(w\colon d \to d') \in W$ に対して，$c_j$ は $W$-local だから

$$\operatorname{Hom}(c_j, w)\colon \operatorname{Hom}(c_j, d) \to \operatorname{Hom}(c_j, d')$$

は同型射である．この極限をとって

$$\lim_j \operatorname{Hom}(c_j, w)\colon \lim_j \operatorname{Hom}(c_j, d) \to \lim_j \operatorname{Hom}(c_j, d')$$

も同型射となるが，$\lim_j \operatorname{Hom}(c_j, d) \cong \operatorname{Hom}(\operatorname{colim}_j c_j, d)$ を経由すれば，$\operatorname{Hom}(\operatorname{colim}_j c_j, w) = \operatorname{Hom}(c, w)$ が同型であることがわかる．よって $c$ も $W$-local である．

$W$ の定義からすべての $s \in S$ は $W$-local である．よって $S$ が presenting であることから $\mathcal{C}$ のすべての対象が $W$-local となる．これより，任意の $(w\colon d \to d') \in W$ に対して，すべての $c \in \mathcal{C}$ で $\operatorname{Hom}(c, w)$ が同型射となり，米田の補題から $w$ も同型射になる．したがって $W = \operatorname{Iso}(\mathcal{C})$ が従い，$S$ は strong である． □

**定義 1.20.** 圏 $\mathcal{C}$ の射 $\gamma\colon c \to d$ が正則エピ射 (regular epimorphism) であるとは，ある射 $f, g\colon b \to c$ が存在して

$$b \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} c \xrightarrow{\gamma} d$$

が coequalizer になるときをいう．明らかに正則エピ射はエピ射である．

**命題 1.21.** 圏 $\mathcal{C}$ のエピ射がすべて正則エピ射であるとき，対象の族 $S$ に対して

$$S \text{ は faithful である} \iff S \text{ は presenting である}$$

が成り立つ．

*Proof.* $S$ が faithful であるとする．任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して，定義 1.2 よりある $s_i \in S$ とエピ射 $\gamma_c\colon \coprod_i s_i \to c$ が存在する．ここで $\gamma_c$ は正則エピ射になるから，coequalizer

$$d \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \textstyle\coprod_i s_i \xrightarrow{\gamma_c} c$$

が存在する．$d$ に対してもエピ射 $\gamma_d\colon \coprod_j s_j \to d$ $(s_j \in S)$ が取れて，このとき

$$\textstyle\coprod_j s_j \underset{g \circ \gamma_d}{\overset{f \circ \gamma_d}{\rightrightarrows}} \coprod_i s_i \xrightarrow{\gamma_c} c$$

は coequalizer になることがわかる．よって $S$ は presenting である． □

## 2　加法圏での生成子

まず，ホモロジー代数の文脈では生成集合と生成子の存在には違いがないことを確認する．

**命題 2.1.** 圏 $\mathcal{C}$ は余積と零対象 $0$ を持つとする[*5]．このとき次は同値である．

(i) $\mathcal{C}$ は生成集合を持つ．

(ii) $\mathcal{C}$ は generator を持つ．

*Proof.* (ii) $\Rightarrow$ (i): 明らか．

(i) $\Rightarrow$ (ii): $\mathcal{C}$ の生成集合を $S = \{s_i\}_{i \in I}$ とし，

$$G \coloneqq \coprod_{i \in I} s_i$$

と置く．$G$ が generator であることを示そう．$\mathcal{C}$ の射 $g_1, g_2 \colon c \to d$ に対して

$$\forall\, h \colon G \to c, \quad g_1 \circ h = g_2 \circ h$$

であるとする．このとき $i \in I$ と $f \colon s_i \to c$ に対して，$g_1 \circ f = g_2 \circ f$ が成り立つ．

$\because$) 各 $j \in I$ に対して射 $\lambda_j \colon s_j \to c$ を

$$\lambda_j = \begin{cases} f & (j = i) \\ 0 & (j \neq i) \end{cases}$$

と定めると，余積の普遍性から

$$\begin{tikzcd} s_j \arrow[d, "\sigma_j"'] \arrow[dr, "\lambda_j"] & \\ \coprod_{j \in I} s_j \arrow[r, dashed, "\lambda"'] & c \end{tikzcd}$$

なる射 $\lambda \colon G = \coprod_{j \in I} s_j \to c$ が存在する．ここで $\sigma_j$ は余積の標準的な射である．今 $g_1 \circ \lambda = g_2 \circ \lambda$ が成り立っているから，

$$g_1 \circ f = g_1 \circ \lambda_i = g_1 \circ \lambda \circ \sigma_i = g_2 \circ \lambda \circ \sigma_i = g_2 \circ \lambda_i = g_2 \circ f$$

となる．

よって $S$ が生成集合であることから，$g_1 = g_2$ が成り立つ．したがって $G$ は generator である．　□

アーベル圏は balanced な圏であって，すべてのエピ射が正則エピ射になるから，次が成り立つ．

[*5] わかりやすく零対象の存在を仮定したが，すべての Hom 集合が空でないことを要求するだけで十分である．

**命題 2.2.** アーベル圏 $\mathcal{C}$ の対象の族 $S$ に対して

$$S\text{ は faithful である} \iff S\text{ は strong である}$$

が成り立つ．さらに $\mathcal{C}$ が余完備なら

$$S\text{ は faithful である} \iff S\text{ は strong である} \iff S\text{ は presenting である}$$

が成り立つ．

*Proof.* 系 1.17 と命題 1.21 より従う． □

## 3 例

**例 3.1.**

(i) 集合の圏 $\mathsf{Set}$ において，一点集合 $1 = \{*\} \in \mathsf{Set}$ は presenting/strong/faithful generator である．$\mathsf{Set}$ のエピ射はすべて分裂エピ射 (split epimorphism) となり，特に正則エピ射になるからである．

(ii) 小さい圏 $\mathcal{C}$ 上の前層圏 $\widehat{\mathcal{C}}$ において，表現可能関手の同型類のなす集合は presenting/strong/faithful である．

(iii) 環上の加群圏 $\mathsf{Mod}(R)$ において，$R \in \mathsf{Mod}(R)$ は presenting/strong/faithful generator である．

(iv) 群の圏 $\mathsf{Grp}$ において，$\mathbb{Z} \in \mathsf{Grp}$ は strong/faithful generator である．

(v) 位相空間の圏 $\mathsf{Top}$ において，一点空間 $1 \in \mathsf{Top}$ は faithful であるが，strong generator ではない．

(vi) コンパクト Hausdorff 空間の圏 $\mathsf{cptHaus}$ において，一点空間 $1 \in \mathsf{cptHaus}$ は strong/faithful generator である．

生成集合の存在は，一種の圏の小ささ (smallness) を保証するものである．

**命題 3.2** ([HoCA1, Proposition 4.5.15])**.** 有限完備な圏 $\mathcal{C}$ が強生成集合を持つならば，$\mathcal{C}$ は well-powered である，すなわちすべての対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して $X$ の部分対象のなすクラスは集合である．

例えば以下のような定理や定義で要求される：

- 特殊随伴関手定理
- Grothendieck アーベル圏
- locally presentable category
- Giraud による Grothendieck トポスの特徴づけ

**定義 3.3.** Grothendieck アーベル圏とは，アーベル圏 $\mathcal{A}$ であって

- $\mathcal{A}$ は余完備である
- filtered colimit を取る関手は完全である
- generator を持つ

をみたすもののこと．

**定義 3.4.** locally small な圏 $\mathcal{C}$ が locally finitely presentable であるとは，

- $\mathcal{C}$ は余完備である
- 有限表示対象から成る強生成集合を持つ

をみたすときをいう．

より一般に正則基数 $\alpha$ に対して locally $\alpha$-presentable category が定義される．Grothendieck アーベル圏は，ある $\alpha$ について locally $\alpha$-presentable であることが知られている．特に，Grothendieck アーベル圏の generator が有限表示であるなら，locally finitely presentable になる．

**例 3.5.**

(i) 環 $R$ 上の加群圏 $\mathsf{Mod}(R)$ は，$R$ を generator に持つ locally finitely presentable な Grothendieck アーベル圏である．

(ii) 環 $R$ 上の加群の余鎖複体の圏 $\mathsf{Ch}(R)$ は，$\{D(R)[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を生成集合に持つような locally finitely presentable な Grothendieck アーベル圏である．ここで $D(R)$ は，0 次と $-1$ 次の項に $R$ を持つような複体

$$D(R): \quad \cdots \to 0 \to R \xrightarrow{\mathrm{id}_R} R \to 0 \to \cdots$$

であり，$[n]$ は複体のシフト関手である．

# 参考文献


[AR94] J. Adámek and J. Rosicky. *Locally Presentable and Accessible Categories*. Cambridge University Press, 1994.

[HoCA1] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1, Basic Category Theory*. Cambridge University Press, 1994.

[Shu] Michael A. Shulman. "Generators and colimit closures". http://home.sandiego.edu/~shulman/papers/generators.pdf.

[Yua] Qiaochu Yuan. "Generators", Annoying Precision, May 17, 2015. https://qchu.wordpress.com/2015/05/17/generators/.

[$n$Lab] $n$Lab, –2020. https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage.