

Spectral 空間と Hochster の環構成*

@paper3510mm[†]

2019 年 12 月 21 日

概要

可換環に対してその素スペクトラムを対応させることで位相空間が得られる。このような位相空間は特に spectral 空間になるが、実はこの逆が成り立ち、すべての spectral 空間はある可換環の素スペクトラムとして表せる。Hochster [Hoc69] は、spectral 空間 X から $\text{Spec}(H_X) \cong X$ となるような環 H_X を具体的に構成してみせた。本稿ではこの構成法に関する結果を解説する。

目次

	Convention	3
0	はじめに	4
I 章	Spectral 空間	5
1	Spectral 空間	5
1.1	Sober 空間, Specialization	5
1.2	Spectral 空間	7
1.3	Constructible 位相	8
2	環の素スペクトラム	13
II 章	Hochster の環構成	17
3	Space with indeterminates	17
4	Spring	17
5	Index on a spring	21
6	Hochster の構成	24
6.1	Strategy for the construction	24
6.2	Step 1: v -extension condition	26
6.3	Step 2: cutting out holes of the form $V(a) \cap D(b)$	31

* Math Advent Calendar 2019 (<https://adventar.org/calendars/4297>), 21 日目の記事です。

[†] Twitter: <https://twitter.com/paper3510mm>. 間違いがあると思うので見つけましたらこちらまで

6.4	Step 3: cutting out the remainder	33
7	Summary	35
III 章	構成の関手性と Hochster の定理	36
8	構成の関手性	36
8.1	圏 Splndet , ISpring	36
8.2	関手 II : $\text{Splndet} \rightarrow \text{ISpring}$	38
8.3	関手 III : $\text{ISpring} \rightarrow \text{ISpring}$	39
9	Hochster の定理	42
IV 章	結びに・参考文献	46
10	結びに	46

Convention

- 集合 X に対して, そのべき集合を $\mathcal{P}(X)$ で表す. 集合 X の部分集合族 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して, $\emptyset \in \mathcal{S}$ かつ任意の有限個の \mathcal{S} の元の和集合がまた \mathcal{S} に属するとき, \mathcal{S} は有限の和集合で閉じるという. 同様に, $X \in \mathcal{S}$ かつ任意の有限個の \mathcal{S} の元の共通部分がまた \mathcal{S} に属するとき, \mathcal{S} は有限の共通部分で閉じるという.
- 位相空間 X が T_0 あるいはコルモゴロフ (Kolmogorov) であるとは, 任意の相異なる二点 $x, y \in X$ に対してある開集合 $U \subseteq X$ が存在して, $x \in U$ かつ $y \notin U$ が成り立つか, または $x \notin U$ かつ $y \in U$ が成り立つときをいう.
- 位相空間 X が準コンパクト (quasi-compact) であるとは, 任意の開被覆が有限部分被覆を持つときをいう.
- 位相空間 X の部分集合 C に対して, C を含む閉集合のうち最小のものを C の閉包といい, \overline{C} で表す. 開集合 $U \subseteq X$ に対して, $C \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{C} \cap U \neq \emptyset$ である.
- 位相空間 X の開集合系 (位相) を \mathcal{O}_X とし, 閉集合系を \mathcal{A}_X で表す.
- X の開集合族 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}_X$ が開基 (open basis) であるとは, 任意の開集合が \mathcal{B} の元の和集合で表せるときをいう. これは, 任意の開集合 $U \subseteq X$ と点 $x \in U$ に対して, $x \in B \subseteq U$ となる $B \in \mathcal{B}$ が存在することと同値である. 開集合族 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}_X$ が開基 \mathcal{B} を含むとき, \mathcal{S} もまた X の開基である.
- X の閉集合族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}_X$ が閉基 (closed basis) であるとは, 任意の閉集合が \mathcal{F} の元の共通集合で表せるときをいう. これは, 任意の閉集合 $C \subseteq X$ と点 $x \notin C$ に対して, $C \subseteq F$ かつ $x \notin F$ となる $F \in \mathcal{F}$ が存在することと同値である.
- X の開集合族 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}_X$ が準開基 (open subbasis) であるとは, 任意の $O \in \mathcal{O}_X$ と $x \in O$ に対して, $N_1, \dots, N_n \in \mathcal{S}$ が存在して, $x \in N_1 \cap \dots \cap N_n \subseteq O$ となるときをいう. 開集合族 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}_X$ が準開基 \mathcal{S} を含むとき, \mathcal{S} もまた X の準開基である.
- 本稿では, 環といえば単位元をもつ可換環のことを指し, 環準同型は単位元を保つとする.
- 整域 A に対して, その商体を $Q(A)$ で表す.
- 環 A のイデアル I に対して, I の根基を $\text{rad}(I)$ で表す. つまり $\text{rad}(I) = \{a \in A \mid \exists n > 0, a^n \in I\}$ である.

0 はじめに

本稿では, Hochster による論文 “Prime Ideal Structure in Commutative Rings” [Hoc69] の結果を紹介する. より具体的に言えば, [Hoc69] の §1–§7 (§16) の内容をまとめたものである.

環 A に対して位相空間 $\text{Spec } A$ が作れることが知られているが, このような $\text{Spec } A$ と表せるような位相空間のクラスはどんな位相空間であろうか. 実はこのような位相空間は位相空間論の言葉で完全に特徴づけることが可能で, spectral 空間と呼ばれる. すなわち, すべての環 A に対して $\text{Spec } A$ は spectral 空間であり, さらに任意の spectral 空間 X に対して $X \cong \text{Spec } H_X$ となる環 H_X が存在する. Hochster は [Hoc69] でこの環 H_X を具体的に構成した. 第一の目標はこの構成法を紹介することである.

Hochster [Hoc69] での結果は, 主に上の事実の形で引用されることが多い. しかし [Hoc69] ではさらに強く, 関手 Spec の section の存在について議論している. 第二の目標は, X に対し H_X を得る構成を関手として捉え直し, Spec が section を持つような十分条件を紹介することである.

I 章では, spectral 空間と spectral 写像を定義し, 関連する命題を証明する. 加えて, 環のスペクトラムが実際に spectral 空間となることを確認し, 関手 $\text{Spec}: \text{Ring}^{\text{op}} \rightarrow \text{Spectral}$ を導入する. spectral 空間に関する議論は [べ 19b] と同じものである.

II 章では, 実際に spectral 空間 X から, $\text{Spec}(H_X) \cong X$ となるような環 H_X を構成していく. 必要な概念は, space with indeterminates と spring, そして spring 上の index と呼ばれるものである. まず, space with indeterminates の概念を導入し (3 節), それから spring を構成する (4 節). この spring 上に index を乗せ (5 節), indexed spring とする. さらにこの indexed spring を修正することで (6 節), 所望の環 H_X が得られることになる.

III 章では, 前章の構成法を関手と捉え直し, 関手 Spec が section を持つための十分条件を述べる Hochster の定理を証明する. 8 節で, 前章で紹介した概念の圏を導入し, 構成の各々の段階で関手を定義する. 続く 9 節で, Hochster の定理を紹介する.

特筆すべき前提知識はないが, 途中, 体上の離散付値の知識を用いる. **IV 章**で参考文献を紹介するが, [Hoc69] に加えて [DST19] と [Ted16] をよく参考にした.

I 章 Spectral 空間

1 Spectral 空間

この節では, spectral 空間についての一般論を展開する.

1.1 Sober 空間, Specialization

定義 1.1. 位相空間 X の空でない部分集合 $C \neq \emptyset$ に対して, C が既約 (irreducible) であるとは, 任意の閉集合 $F, F' \subseteq X$ に対して, $C \subseteq F \cup F'$ ならば $C \subseteq F$ または $C \subseteq F'$ が成り立つときをいう.

命題 1.2. 位相空間 X の部分集合 $C \neq \emptyset$ が既約である必要十分条件は, 任意の開集合 $U, U' \subseteq X$ に対して

$$C \cap U \neq \emptyset, C \cap U' \neq \emptyset \implies C \cap (U \cap U') \neq \emptyset$$

となることである.

Proof. 定義の言い換えである. □

補題 1.3. 位相空間 X の部分集合 $C \neq \emptyset$ に対して,

$$C \text{ が既約である} \iff \overline{C} \text{ が既約である.}$$

Proof. C が既約であるとする. 閉集合 $F, F' \subseteq X$ に対して $\overline{C} \subseteq F \cup F'$ であるとき, $C \subseteq F \cup F'$ となるから既約性より $C \subseteq F$ または $C \subseteq F'$ が成り立つ. F, F' は閉集合だから, $\overline{C} \subseteq F$ または $\overline{C} \subseteq F'$ となり, \overline{C} は既約である.

逆に \overline{C} が既約であるとする. 閉集合 $F, F' \subseteq X$ に対して $C \subseteq F \cup F'$ であるとき, $F \cup F'$ も閉集合であるから $\overline{C} \subseteq F \cup F'$ となり, 既約性より $\overline{C} \subseteq F$ または $\overline{C} \subseteq F'$ が成り立つ. 特に $C \subseteq F$ または $C \subseteq F'$ となり, C は既約である. □

位相空間 X の点 $x \in X$ について, $\{x\}$ は明らかに既約だから $\overline{\{x\}}$ は既約な閉集合となる. X の既約閉集合 C が, ある $x \in X$ を用いて $C = \overline{\{x\}}$ と表せるとき, x を C の生成点 (generic point) という. 一般には, 一点集合の閉包の形で表せない (つまり生成点を持たない) 既約閉集合が存在する.

定義 1.4. 位相空間 X が sober であるとは, すべての既約閉集合が一意的な生成点を持つときをいう.

命題 1.5. 位相空間 X について,

$$X \text{ は } T_0 \text{ である} \iff \text{既約閉集合の生成点は高々一つしかない}$$

が成り立つ. 特に sober な位相空間は T_0 である.

Proof. (\Rightarrow): X は T_0 であるとする. 既約閉集合 C が $x, y \in X$ を生成点に持つとき, $C = \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ である. もし $x \neq y$ であるとする T_0 性より, ある開集合 $U \subseteq X$ が存在して, $x \in U$ かつ $y \notin U$ が成り立つか, または $x \notin U$ かつ $y \in U$ が成り立つ. $x \in U$ かつ $y \notin U$ が成り立つとすると, $\emptyset \neq \overline{\{x\}} \cap U = \overline{\{y\}} \cap U$ より $y \in U$ となるが, これは $y \notin U$ に矛盾する. $x \notin U$ かつ $y \in U$ のときも同様に矛盾. よって $x = y$ となり, 生成点は存在すれば一意である.

(\Leftarrow): 二点 $x, y \in X$ について, $x \neq y$ とする. このとき生成点の一意性から $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ である. $x \notin \overline{\{y\}}$ の場合, 開集合 U を $U = X \setminus \overline{\{y\}}$ とおけば, $x \in U$ かつ $y \notin U$ となる. $x \in \overline{\{y\}}$ の場合, $\overline{\{x\}} \subsetneq \overline{\{y\}}$ であるから, 開集合 U を $U = X \setminus \overline{\{x\}}$ とおけば $U \cap \overline{\{y\}} \neq \emptyset$ より $x \notin U$ かつ $y \in U$ となる. したがって X は T_0 である. \square

定義 1.6. 位相空間 X に対して, X 上の二項関係 \rightsquigarrow を

$$x \rightsquigarrow y \iff y \in \overline{\{x\}}$$

によって定めると, これは前順序 (preorder) になる. この前順序 \rightsquigarrow を specialization order あるいは specialization という. $x \rightsquigarrow y$ のとき, y は x の specialization である, または x は y の generalization であるという.

命題 1.7. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は specialization を保つ. すなわち, $x, x' \in X$ に対して $x \rightsquigarrow x'$ ならば $f(x) \rightsquigarrow f(x')$ が成り立つ.

Proof. $x \rightsquigarrow x'$ のとき, $x' \in \overline{\{x\}}$ であるから $f(x') \in f(\overline{\{x\}})$ となる. 連続性より $f(\overline{\{x\}}) \subseteq \overline{\{f(x)\}}$ であるから, $f(x') \in \overline{\{f(x)\}}$ となり $f(x) \rightsquigarrow f(x')$ が成り立つ. \square

一般に specialization order は半順序 (partial order) ではないが次が成り立つ.

命題 1.8. 位相空間 X に対して

$$\rightsquigarrow \text{ は半順序をなす} \iff X \text{ は } T_0 \text{ である.}$$

Proof. (\Rightarrow): $x, y \in X$ に対して, \rightsquigarrow の反対称律より, $y \in \overline{\{x\}}$ かつ $x \in \overline{\{y\}}$ ならば $x = y$ となる. これは $x \neq y$ のとき, $y \in X \setminus \overline{\{x\}}$ または $x \in X \setminus \overline{\{y\}}$ となること意味し, よって X は T_0 である.

(\Leftarrow): $x, y \in X$ について, $x \rightsquigarrow y$ かつ $y \rightsquigarrow x$ とする. $x \neq y$ とすると, ある開集合 $U \subseteq X$ が存在して, $x \in U$ かつ $y \notin U$ が成り立つか, または $x \notin U$ かつ $y \in U$ が成り立つ. 前者の場合,

$y \rightsquigarrow x$ より $x \in U \cap \overline{\{y\}}$ となり, よって $y \in U$ となるがこれは $y \notin U$ に矛盾. 後者も同様. したがって $x = y$ となる. \square

1.2 Spectral 空間

位相空間 X に対して, quasi-compact な開集合全体の集合を

$$\mathring{\mathcal{K}}(X) := \{U \subseteq X \mid U \text{ は quasi-compact open}\}$$

とおく. $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ は $\mathcal{P}(X)$ の部分集合として有限個の元の和集合をとる操作で閉じ, $\emptyset \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ である.

定義 1.9. 位相空間 X が spectral 空間であるとは,

- (S1) X は quasi-compact である
- (S2) X は quasi-compact な開集合からなる開基 $\mathcal{B}_X \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(X)$ をもつ
- (S3) $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ は有限個の元の共通集合をとる操作で閉じる
- (S4) X は sober である

をみたすときをいう. coherent 空間と呼ばれることもある ([Joh82]). 上の条件 (S1)–(S3) をみたす位相空間を pre-spectral 空間と呼ぶことにする*1.

X が spectral 空間のとき, $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ は (S2) より X の開基をなし, (S1) と (S3) より \mathcal{O}_X の有界な部分分配束になる. また (S4) より spectral 空間は T_0 で, X 上の specialization order \rightsquigarrow は半順序になる. 明らかに spectral 空間は T_0 な pre-spectral 空間である.

命題 1.10. X を位相空間とする. $\mathcal{S} \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(X)$ が X のある開基を含み, 有限の和集合で閉じるならば, $\mathcal{S} = \mathring{\mathcal{K}}(X)$ となる.

Proof. 任意の $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ に対して, \mathcal{S} が X の開基を含むから, U は \mathcal{S} の元の和集合で書ける. U は quasi-compact だからこれは有限個の \mathcal{S} の元の和集合としてよく, \mathcal{S} は有限の和集合で閉じることから $U \in \mathcal{S}$ となる. \square

定義 1.11. X, Y を spectral 空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が spectral 写像であるとは, すべての $V \in \mathring{\mathcal{K}}(Y)$ に対して $f^{-1}(V) \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ となるときをいう.

命題 1.12. spectral 空間 X, Y に対して, spectral 写像 $f: X \rightarrow Y$ は連続写像である.

Proof. spectral 空間 Y が quasi-compact な開集合からなる開基 $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(Y)$ を持つことから明らか. \square

*1 本稿だけの用語であることに注意.

spectral 空間と spectral 写像のなす圏を $\mathbf{Spectral}$ で表す．位相空間と連続写像のなす圏を \mathbf{Top} とすると，命題 1.12 により $\mathbf{Spectral}$ は \mathbf{Top} の部分圏となる．

spectral 空間 X に対して，分配束 $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ が得られる． $f: X \rightarrow Y$ が spectral 写像なら，束準同型

$$\mathring{\mathcal{K}}(f): \mathring{\mathcal{K}}(Y) \rightarrow \mathring{\mathcal{K}}(X); \quad V \mapsto f^{-1}(V)$$

が定まる．これらの対応は反変関手

$$\mathring{\mathcal{K}}: \mathbf{Spectral}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{DLat}$$

を与える．

1.3 Constructible 位相

spectral 空間では，もともとの位相の他に新たな位相をのせて考えることが多い．そのうちのひとつが constructible 位相である．

位相空間 X の quasi-compact な開集合の補集合全体の集合を

$$\overline{\mathcal{K}}(X) := \{X \setminus U \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)\}$$

と置く． X が pre-spectral 空間なら， $\overline{\mathcal{K}}(X)$ は分配束になる．

定義 1.13. X を pre-spectral 空間，つまり定義 1.9 の条件 (S1)–(S3) をみたす位相空間とする．このとき， $\mathring{\mathcal{K}}(X) \cup \overline{\mathcal{K}}(X)$ を準開基とする X 上の位相のことを， X 上の constructible topology (あるいは patch topology) という．言い換えると， X の quasi-compact な開集合が clopen 集合となるような最小の位相のこと．

X 上に constructible 位相をのせて位相空間としたものを X の patch 空間といい， X_{con} と表す．

(pre-)spectral 空間 X 上の constructible 位相を考えているとき，もともとの X の位相を (pre-)spectral 位相と呼ぶこともある．

命題 1.14. (pre-)spectral 空間 X の constructible 位相は，もともとの (pre-)spectral 位相よりも細かい．言い換えれば， $\text{id}_X: X_{\text{con}} \rightarrow X$ は連続である．

Proof. $\mathcal{B}_X \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(X) \cup \overline{\mathcal{K}}(X)$ より明らか． \square

命題 1.15. spectral 空間 X に対して， X_{con} は Hausdorff 空間である．

Proof. $x \neq y$ なる $x, y \in X_{\text{con}}$ をとる．spectral 空間 X が T_0 で $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ を開基にもつことから，ある開集合 $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ が存在して， $x \in U$ かつ $y \notin U$ が成り立つか，または $x \notin U$ かつ $y \in U$ が成り立つ．いずれにせよ， X_{con} の開集合 $U, X \setminus U \subseteq X_{\text{con}}$ は x と y を分離する．よって X_{con} は Hausdorff である． \square

命題 1.16. X を spectral 空間とするととき, $\mathcal{B}_{\text{con}} = \{U \cap V \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X), V \in \overline{\mathcal{K}}(X)\}$ は X_{con} の clopen 集合から成る開基をなす.

Proof. constructible 位相の定義から $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X), V \in \overline{\mathcal{K}}(X)$ は X_{con} の開集合である. $X \in \overline{\mathcal{K}}(X)$ であるから, $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ に対して $U = U \cap X \in \mathcal{B}_{\text{con}}$ より, $\mathring{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathcal{B}_{\text{con}}$ である. 同様に $X \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ であることから, $\overline{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathcal{B}_{\text{con}}$ となる. よって $\mathring{\mathcal{K}}(X) \cup \overline{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathcal{B}_{\text{con}}$ である. \mathcal{B}_{con} が有限の共通部分で閉じることから, X_{con} の位相の入れ方より, \mathcal{B}_{con} は X_{con} の開基である. 各 $U \cap V \in \mathcal{B}_{\text{con}}$ が clopen であることは明らか. \square

系 1.17. X を spectral 空間とするととき, $\mathcal{F}_{\text{con}} = \{U \cup V \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X), V \in \overline{\mathcal{K}}(X)\}$ は X_{con} の閉基をなす.

Proof. $\{X \setminus F \mid F \in \mathcal{F}_{\text{con}}\} = \mathcal{B}_{\text{con}}$ が開基だから, \mathcal{F}_{con} は閉基である. \square

命題 1.18. T_0 な pre-spectral 空間 X に対して,

$$X \text{ は sober} \iff X_{\text{con}} \text{ は quasi-compact}$$

が成り立つ. 特に X が spectral 空間のとき, X_{con} は quasi-compact である.

Proof. (\Leftarrow): X_{con} は quasi-compact とし, $C \subseteq X$ を空でない既約閉集合とする. X は T_0 だから, 命題 1.5 より C が生成点を持つことを示せばよい.

$$\mathcal{U}_C = \{U \cap C \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X), U \cap C \neq \emptyset\}$$

とおく. C も $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ も X_{con} の閉集合だから, \mathcal{U}_C は X_{con} の閉集合族である. $U_1, \dots, U_n \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ に対して $U_i \cap C \neq \emptyset$ であるとする. このとき $C \not\subseteq U_i^c$ であり, C は既約だから $C \not\subseteq U_1^c \cup \dots \cup U_n^c$ が成り立ち, $(U_1 \cap \dots \cap U_n) \cap C \neq \emptyset$ となる. $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ だから $(U_1 \cap \dots \cap U_n) \cap C \in \mathcal{U}_C$ となる. このことから \mathcal{U}_C は有限交差性をもつことがわかる. このとき X_{con} が quasi-compact であることから \mathcal{U}_C は交差し, $\bigcap \mathcal{U}_C \neq \emptyset$ である. $x \in \bigcap \mathcal{U}_C$ をとると, $x \in C$ より, $\overline{\{x\}} \subseteq C$ である. もし $\overline{\{x\}} \subsetneq C$ であるとする, ある $y \in C \setminus \overline{\{x\}}$ が取れて, さらに $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ は X の開基だから, $y \in U' \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$ なる $U' \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ が存在する. このとき $y \in U' \cap C$ より $U' \cap C \neq \emptyset$ で, よって $U' \cap C \in \mathcal{U}_C$ となるので, $x \in U' \cap C$ が従うが, これは $x \notin U'$ に反する. したがって $C = \overline{\{x\}}$ となり, C は生成点をもつ.

(\Rightarrow): 系 1.17 より

$$\mathcal{F}_{\text{con}} = \{U \cup V \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X), V \in \overline{\mathcal{K}}(X)\}$$

は X_{con} の閉基である. よって X_{con} が quasi-compact であることを示すには, 有限交差性をもつ任意の $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_{\text{con}}$ に対して, \mathcal{U} が交差することを示せばよい. 有限交差性をもつ $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_{\text{con}}$ をとり

$$\Sigma = \{U' \subseteq \mathcal{F}_{\text{con}} \mid U' \text{ は } \mathcal{U} \text{ を含み, 有限交差性をもつ}\}$$

と置く. Σ は包含に関して空でない帰納的半順序集合となるから, Zorn の補題より極大元 $\mathcal{M} \in \Sigma$ が存在する. \mathcal{M} が交差すれば \mathcal{U} も交差するから, $\mathcal{U} = \mathcal{M}$, つまり \mathcal{U} は Σ の極大元であるとしてよい. 極大性から $X \in \mathcal{U}$ となることに注意する. このとき

$$\forall F, F' \in \mathcal{F}_{\text{con}}, \quad F \cup F' \in \mathcal{U} \implies F \in \mathcal{U} \text{ または } F' \in \mathcal{U} \quad (\text{a})$$

が成り立つ.

$\therefore F, F' \notin \mathcal{U}$ であるとする. \mathcal{U} の極大性より $\mathcal{U} \cup \{F\}$ および $\mathcal{U} \cup \{F'\}$ は有限交差性をもたず,

$$F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap F = \emptyset, \quad F'_1 \cap \cdots \cap F'_m \cap F' = \emptyset$$

となる $F_1, \dots, F_n, F'_1, \dots, F'_m \in \mathcal{U}$ が存在する. このとき

$$F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap F'_1 \cap \cdots \cap F'_m \cap (F \cup F') = \emptyset$$

であるから $F \cup F' \notin \mathcal{U}$ となる.

また

$$C = \bigcap \{V \mid V \in \mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{K}}(X)\}$$

とおくとき,

$$\forall U \in \mathring{\mathcal{K}}(X), \quad U \in \mathcal{U} \iff C \cap U \neq \emptyset \quad (\text{b})$$

が成り立つ.

$\therefore U \in \mathcal{U}$ とする. $\mathcal{V} = \{U \cap V \mid V \in \mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{K}}(X)\}$ を考えると, $U \cap \bar{\mathcal{K}}(X) \subseteq U$ より \mathcal{V} は有限交差性をもつ. \mathcal{V} は, X の部分空間としての U の閉集合族であるから, U の quasi-compact 性より, $C \cap U = \bigcap \mathcal{V} \neq \emptyset$ となる.

一方, $U \notin \mathcal{U}$ とする. $U, X \setminus U \in \mathcal{F}_{\text{con}}$ に対して $U \cup (X \setminus U) = X \in \mathcal{U}$ だから, (a) より $X \setminus U \in \mathcal{U}$ を得る. $X \setminus U \in \bar{\mathcal{K}}(X)$ であるから, $C \subseteq X \setminus U$, すなわち $C \cap U = \emptyset$ となる.

特に $X \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ に対して $X \in \mathcal{U}$ より $C = C \cap X \neq \emptyset$ である. 次に C が既約であることを示そう. $U_1, U_2 \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ に対して $C \cap U_1 \neq \emptyset$ かつ $C \cap U_2 \neq \emptyset$ であるとする. すると (b) より $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ であり, また (S3) より $U_1 \cap U_2 \in \mathring{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathcal{F}_{\text{con}}$ である. よって \mathcal{U} の極大性から $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ がわかり, 再び (b) から $C \cap (U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$ となる. よって C は既約である.

よって C は空でない既約な閉集合であるから, X の sober 性より生成点 $x \in C$ が存在して $C = \overline{\{x\}}$ となる. \mathcal{U} の任意の元 $U \cup V \in \mathcal{U}$ ($U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$, $V \in \bar{\mathcal{K}}(X)$) に対して, (a) より $U \in \mathcal{U}$ または $V \in \mathcal{U}$ である. $V \in \mathcal{U}$ のときは, $x \in C \subseteq V \subseteq U \cup V$ となる. $U \in \mathcal{U}$ のとき, (b) より $\overline{\{x\}} \cap U = C \cap U \neq \emptyset$ であるから $x \in U \subseteq U \cup V$ となる. したがって $x \in \bigcap \mathcal{U}$ となり \mathcal{U} は交差する. 以上より X_{con} は quasi-compact である. \square

命題 1.19. spectral 空間 X, Y に対して, 写像 $f: X \rightarrow Y$ が spectral 写像であることは, f が spectral 位相と constructible 位相の両方に関して連続であることと同値である.

Proof. (\Rightarrow): f が spectral 写像であるとき, 命題 1.12 より spectral 位相に関して連続である. また $U \in \mathring{\mathcal{K}}(Y)$, $V \in \overline{\mathcal{K}}(Y)$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$, $f^{-1}(V) \in \overline{\mathcal{K}}(X)$ となるから, constructible 位相に関する連続である.

(\Leftarrow): quasi-compact な Y の開集合 $U \in \mathring{\mathcal{K}}(Y)$ を任意にとる. f は spectral 位相に関して連続だから, $f^{-1}(U) \subseteq X$ は spectral 位相での開集合である. また $U \subseteq Y_{\text{con}}$ は constructible 位相で閉集合であるから, f が constructible 位相でも連続であることより, $f^{-1}(U) \subseteq X_{\text{con}}$ は constructible 位相で閉集合である. 命題 1.18 より X_{con} は quasi-compact だから閉集合 $f^{-1}(U) \subseteq X_{\text{con}}$ も quasi-compact で, 命題 1.14 より $\text{id}: X_{\text{con}} \rightarrow X$ が連続だから $f^{-1}(U) \subseteq X$ は spectral 位相に関する quasi-compact である. よって f は spectral 写像である. \square

constructible 位相を用いれば, spectral 空間の spectral 部分空間を特徴づけることができる.

定義 1.20. X を spectral 空間とする. 部分集合 $Y \subseteq X$ が spectral subspace であるとは, Y が X の相対位相で spectral 空間となり, かつ包含写像 $Y \hookrightarrow X$ が spectral 写像であるときをいう.

命題 1.21. spectral 空間 X の部分集合 $Y \subseteq X$ に対して, X の相対位相を入れて Y を位相空間とすると,

Y は X の spectral subspace $\iff Y \subseteq X_{\text{con}}$ は constructible 位相で閉集合

が成り立ち, このとき

$$\mathring{\mathcal{K}}(Y) = \{U \cap Y \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)\}$$

である. 特に X_{con} の閉集合は spectral 位相で quasi-compact である.

Proof. (\Rightarrow): $Y \subseteq X$ が spectral subspace であるとき, 命題 1.18 より Y_{con} は quasi-compact であり, 包含写像 $Y_{\text{con}} \hookrightarrow X_{\text{con}}$ は連続だから, $Y \subseteq X_{\text{con}}$ は constructible 位相で quasi-compact である. 命題 1.15 より X_{con} は Hausdorff であるから, Y は X_{con} の閉集合である.

(\Leftarrow): Y が X_{con} の閉集合であるとする. X_{con} が quasi-compact だから Y は constructible 位相で quasi-compact で, 命題 1.14 より spectral 位相でも quasi-compact である. このとき部分空間 $Y \subseteq X$ について $\mathring{\mathcal{K}}(Y) = \{U \cap Y \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)\}$ が成り立つ.

\therefore (\supseteq): 各 $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ は X_{con} の閉集合だから $U \cap Y$ も X_{con} の閉集合である. よって $U \cap Y$ は constructible 位相で quasi-compact な部分集合であり, spectral 位相でも quasi-compact な部分集合となる. $U \cap Y$ は Y の開集合だから, $U \cap Y \in \mathring{\mathcal{K}}(Y)$ である.

(\subseteq): $V \in \mathring{\mathcal{K}}(Y)$ に対し, $\{U \cap Y \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)\}$ は部分空間 Y の開基をなしているから

$$\exists U_i \in \mathring{\mathcal{K}}(X), \quad V = \bigcup_i (U_i \cap Y)$$

となる. V は Y の quasi-compact な部分集合だから, 添え字 i は有限個としてよく, $i = 1, \dots, n$ とすると

$$V = \bigcup_{i=1}^n (U_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \right) \cap Y$$

となる. $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ は有限の和集合で閉じるから $\bigcup_{i=1}^n U_i \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ であるので, $V \in \{U \cap Y \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)\}$ となる.

このことから Y は X の相対位相で (S1)–(S3) をみたすことがわかる. あとは Y が sober であることを示せばよい.

$\emptyset \neq C \subseteq Y$ を空でない既約閉集合とすると, X の閉集合 F を用いて $C = Y \cap F$ と表せる. Y は X_{con} の閉集合で, F も X_{con} の閉集合だから, C は X_{con} の閉集合となる. さらに C は X の既約集合でもあるから

$$\mathcal{U} = \{U \cap C \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X), U \cap C \neq \emptyset\}$$

は有限交差性をもつ. \mathcal{U} は X_{con} の閉集合族であり, 命題 1.18 より X_{con} は quasi-compact であるから, \mathcal{U} は交差し, $x \in \bigcap \mathcal{U} \subseteq C$ なる元 $x \in Y$ が存在する. C は Y の閉集合だから $\overline{\{x\}}^Y = \overline{\{x\}} \cap Y \subseteq C$ であり, また \mathcal{U} の定義から $C \subseteq \overline{\{x\}}$ もわかる (ここで $\overline{\{x\}}$ は X の spectral 位相での閉包を表し, $\overline{\{x\}}^Y$ は Y の相対位相での閉包を表す).

$\therefore C \not\subseteq \overline{\{x\}}$ であるとする, $c \notin \overline{\{x\}}$ となる $c \in C$ が存在する. このとき X の開集合 $X \setminus \overline{\{x\}}$ は c の開近傍であり, $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ が X の開基をなすことから, $c \in U \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$ となる $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ がとれる. すると $U \cap C \neq \emptyset$ より $U \cap C \in \mathcal{U}$ であり, したがって $x \in \bigcap \mathcal{U} \subseteq U \cap C \subseteq U$ となるが, これは $x \notin U$ に矛盾する. よって $C \subseteq \overline{\{x\}}$ が成り立つ.

よって $C = \overline{\{x\}}^Y$ となる. X が T_0 であるから Y も T_0 で, よって命題 1.5 より, Y は sober である.

以上より Y は X の相対位相で spectral 空間であり, また $\mathring{\mathcal{K}}(Y) = \{U \cap Y \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)\}$ より包含写像 $Y \hookrightarrow X$ は spectral 写像となるから, Y は X の spectral subspace である. \square

後に使用する補題をここで証明しておく.

補題 1.22. spectral 空間 X と X_{con} の閉集合 Y に対して,

$$y \in \overline{Y} \iff \exists x \in Y, y \in \overline{\{x\}}.$$

ただし, \overline{Y} や $\overline{\{x\}}$ は spectral 位相に関する閉包を表す.

Proof. (\Rightarrow): $y \in \bar{Y}$ をとる. $\mathcal{U}_y = \{U \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}(X) \mid y \in U\}$ を考えるとき, $\mathcal{U}_y \cup \{Y\}$ は有限交差性をもつ.

\therefore 明らかに \mathcal{U}_y は有限交差性をもつ. $U \in \mathcal{U}_y$ に対して, $y \in U \cap \bar{Y}$ だから $U \cap \bar{Y} \neq \emptyset$ であり, よって $U \cap Y \neq \emptyset$ である. したがって, $\mathcal{U}_y \cup \{Y\}$ のどの有限個の元をとっても必ず交差する.

よって $\mathcal{U}_y \cup \{Y\}$ は X_{con} の有限交差な閉集合族だから, X_{con} の quasi-compact 性より

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}_y} U \cap Y \neq \emptyset$$

となる. このとき $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_y} U \cap Y$ をとれば, $x \in Y$ かつ $y \in \overline{\{x\}}$ となる.

(\Leftarrow) は明らか. □

2 環の素スペクトラム

環 A の部分集合 S に対して, S で生成される A のイデアルを $\langle S \rangle$ と書く. イデアル $I \subseteq A$ に対して $\text{rad } I = I$ をみたすとき, I は根基イデアル (radical ideal) であるという.

環 A に対して, A の素イデアル全体の集合を

$$\text{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subseteq A \mid \mathfrak{p} \text{ は素イデアル}\}$$

とおく. また A のイデアル I に対して $\text{Spec}(A)$ の部分集合 $V(I)$ を

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

とする. $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ のとき $V(I) = V(a_1, \dots, a_n)$ とかく.

命題 2.1. 環 A のイデアル I, J, I_λ について, 次が成り立つ.

- (i) $I \subseteq J \implies I \subseteq \text{rad } J \iff V(J) \subseteq V(I)$
- (ii) $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$
- (iii) $\bigcap_\lambda V(I_\lambda) = V(\sum I_\lambda)$
- (iv) $V(0) = \text{Spec}(A), V(1) = \emptyset$

Proof. あえて読者の演習として残す. □

この命題の (ii)~(iv) から, $\text{Spec}(A)$ の部分集合族 $\{V(I) \mid I \text{ はイデアル}\}$ は閉集合の公理をみたし, $\text{Spec}(A)$ 上に位相が定まる. この位相を Zariski 位相 (Zariski topology) といい, Zariski 位相の入った位相空間 $\text{Spec}(A)$ を, 環 A の素スペクトラム (prime spectrum) という. 位相の入れ方から $\text{Spec}(A)$ の開集合は, I をイデアルとして

$$D(I) := \text{Spec}(A) \setminus V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid I \not\subseteq \mathfrak{p}\}$$

と書ける. 特に $a \in A$ に対して

$$D(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid \langle a \rangle \not\subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid a \notin \mathfrak{p}\}$$

という形の開集合を, $\text{Spec}(A)$ の基本開集合 (principal open set) という.

命題 2.2. 環 A の元 a, b について次が成り立つ.

- (i) $D(a) \cap D(b) = D(ab)$
- (ii) $D(a)$ は quasi-compact. 特に $D(1) = \text{Spec}(A)$ だから $\text{Spec}(A)$ も quasi-compact である.
- (iii) $\mathbb{D}(A) := \{D(a)\}_{a \in A}$ は $\text{Spec}(A)$ の開基をなす.

Proof. (i) は素イデアルの性質から明らか.

(ii) $\{U_\lambda\}$ を $D(a)$ の開被覆とする. U_λ^c は $\text{Spec}(A)$ の閉集合だからイデアル I_λ を用いて $U_\lambda^c = V(I_\lambda)$ と書ける. すると $V(a)^c = D(a) \subseteq \bigcup_\lambda U_\lambda = \bigcup_\lambda V(I_\lambda)^c$ より $V(\sum_\lambda I_\lambda) = \bigcap_\lambda V(I_\lambda) \subseteq V(a)$ となるから, $a \in \langle a \rangle \subseteq \text{rad}(\sum_\lambda I_\lambda)$ を得る. ある $m > 0$ が存在して $a^m \in \sum_\lambda I_\lambda$ であり, ゆえに有限個の $f_i \in I_{\lambda_i}$ が存在して $a^m = f_1 + \cdots + f_n$ とかける. すると $a^m \in \sum_{i=1}^n I_{\lambda_i}$ となり, $a \in \text{rad}(\sum_{i=1}^n I_{\lambda_i})$ だから, $V(\sum_{i=1}^n I_{\lambda_i}) = V(I_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap V(I_{\lambda_n}) \subseteq V(a)$ より $D(a) \subseteq U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$ となる. したがって $D(a)$ は quasi-compact である.

(iii) 任意の開集合 $D(I)$ とその元 $\mathfrak{p} \in D(I)$ に対して, $I \not\subseteq \mathfrak{p}$ より $a \in I$ かつ $a \notin \mathfrak{p}$ となるものが存在し, このとき $\mathfrak{p} \in D(a) \subseteq D(I)$ となる. よって $\mathbb{D}(A)$ は $\text{Spec}(A)$ の開基となる. \square

命題 2.3. $\text{Spec}(A)$ の空でない閉集合 $C \neq \emptyset$ に対して

$$C \text{ は既約閉集合である} \iff \text{素イデアル } \mathfrak{p} \text{ を用いて } C = V(\mathfrak{p}) \text{ と表せる.}$$

Proof. (\Rightarrow): C を空でない既約閉集合とする. C は $\text{Spec}(A)$ の閉集合だから, イデアル $I \subseteq A$ を用いて $C = V(I)$ と表せる. ここで $V(I) = V(\text{rad } I)$ だから I は根基イデアルとしてよい. このとき I が素イデアルであることを示そう. $a, b \in A$ に対して $ab \in I$ であるとすると, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle ab \rangle \subseteq I$ より $V(I) \subseteq V(a) \cup V(b)$ である. $C = V(I)$ は既約だから $V(I) \subseteq V(a)$ または $V(I) \subseteq V(b)$ が成り立つ. よって $a \in \text{rad } I = I$ または $b \in \text{rad } I = I$ が成り立ち, I は素イデアルである.

(\Leftarrow): 素イデアル \mathfrak{p} を用いて $C = V(\mathfrak{p})$ と表せたとする. $\text{Spec}(A)$ の閉集合 $V(I), V(J)$ に対して $C \subseteq V(I) \cup V(J)$ とすると, $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(IJ)$ より $IJ \subseteq \mathfrak{p}$ となる. \mathfrak{p} は素イデアルだから $I \subseteq \mathfrak{p}$ または $J \subseteq \mathfrak{p}$ となり, $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(I)$ または $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(J)$ を得る. よって $C = V(\mathfrak{p})$ は既約. \square

環 A に対して位相空間 $\text{Spec}(A)$ を対応させることを見た. 環準同型 $\varphi: A \rightarrow B$ を考えるとき, B の素イデアル \mathfrak{q} に対して, A のイデアル $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ は素イデアルとなる. これにより写像 $\text{Spec}(\varphi): \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ が $\text{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q}) := \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ によって定まる.

命題 2.4. 環準同型 $\varphi: A \rightarrow B$ に対して

$$(\text{Spec } \varphi)^{-1}(D(a)) = D(\varphi(a)) \quad (a \in A)$$

が成り立つ. 命題 2.2 より $\mathbb{D}(A) = \{D(a)\}_{a \in A}$ は開基をなすから, したがって $\text{Spec } \varphi$ は連続写像となる.

Proof. $a \in A$ とすると

$$\begin{aligned} (\text{Spec } \varphi)^{-1}(D(a)) &= \{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B) \mid \text{Spec } \varphi(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in D(a)\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B) \mid a \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{q})\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B) \mid \varphi(a) \notin \mathfrak{q}\} = D(\varphi(a)). \quad \square \end{aligned}$$

こうして, 環の圏から位相空間の圏への関手 $\text{Spec}: \text{Ring}^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$ が得られる. 実はこの関手は Top の部分圏 Spectral を通じて分解することがわかる. これを確認しよう.

まず, 上のように構成した位相空間 $\text{Spec}(A)$ は spectral 空間の一例になっている.

定理 2.5. 環 A に対して, $\text{Spec}(A)$ は spectral 空間である.

Proof. (S1): 命題 2.2 より $\text{Spec}(A)$ は quasi-compact である.

(S2): 命題 2.2 より, $\text{Spec}(A)$ は quasi-compact な開集合からなる開基 $\mathbb{D}(A) = \{D(a) \mid a \in A\}$ をもつ.

(S3): quasi-compact な開集合 $U, V \subseteq \text{Spec}(A)$ をとると, 有限個の元 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in A$ が存在して

$$U = D(a_1) \cup \dots \cup D(a_n), \quad V = D(b_1) \cup \dots \cup D(b_m)$$

と表せる. すると

$$\begin{aligned} U \cap V &= (D(a_1) \cup \dots \cup D(a_n)) \cap (D(b_1) \cup \dots \cup D(b_m)) \\ &= \bigcup_{i,j} (D(a_i) \cap D(b_j)) = \bigcup_{i,j} D(a_i b_j) \end{aligned}$$

となり, quasi-compact な開集合の有限個の和集合だから, $U \cap V$ も quasi-compact な開集合である.

(S4): まず, 空でない既約閉集合 $C \subseteq \text{Spec}(A)$ に対して, C が生成点をもつことを示そう. 命題 2.3 より素イデアル $\mathfrak{p} \subseteq A$ を用いて $C = V(\mathfrak{p})$ と表せ, $\mathfrak{p} \in C$ となっている. $\text{Spec}(A)$ の任意の閉集合 $V(I)$ に対して $\mathfrak{p} \in V(I)$ であるとき, $I \subseteq \mathfrak{p}$ より $C = V(\mathfrak{p}) \subseteq V(I)$ となえうので, C は \mathfrak{p} を含む最小の閉集合である. よって $C = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ であり, C は生成点をもつ.

あとは $\text{Spec}(A)$ が T_0 であることを示せば, 命題 1.5 より $\text{Spec}(A)$ が sober であることがわかる. $\text{Spec}(A)$ が T_0 であることを示そう. $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$ に対して $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ であるすると, $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$ または $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{q}$ が成り立ち, $a \in \mathfrak{p}$ かつ $a \notin \mathfrak{q}$ なる元 $a \in A$ が存在するか, または $a \notin \mathfrak{p}$ かつ $a \in \mathfrak{q}$ なる元 $a \in A$ が存在する. このとき $\mathfrak{p} \notin D(a)$ かつ $\mathfrak{q} \in D(a)$, または $\mathfrak{p} \in D(a)$ かつ $\mathfrak{q} \notin D(a)$ となり, $D(a)$ は開集合だから, $\text{Spec}(A)$ は T_0 である. \square

途中で得られた事実を系として取り上げておく.

系 2.6. 環 A に対して位相空間 $\text{Spec}(A)$ の quasi-compact な開集合は, 基本開集合の有限和で書ける. つまり

$$\mathring{\mathcal{K}}(\text{Spec } A) = \{D(a_1) \cup \cdots \cup D(a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in A\}.$$

Proof. $\mathbb{D}(A)$ が開基であることと quasi-compact 性から従う. □

これらによって, 環準同型が誘導する素スペクトラムの間の連続写像は spectral 写像であることがわかる.

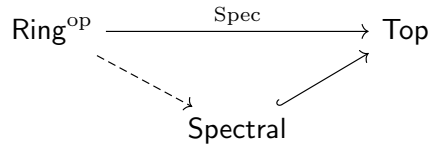
系 2.7. 環準同型 $\varphi: A \rightarrow B$ に対して, $\text{Spec } \varphi: \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ は spectral 写像である.

Proof. 任意の $D(a_1) \cup \cdots \cup D(a_n) \in \mathring{\mathcal{K}}(\text{Spec } A)$ に対して, 命題 2.4 より

$$\begin{aligned} (\text{Spec } \varphi)^{-1}(D(a_1) \cup \cdots \cup D(a_n)) &= (\text{Spec } \varphi)^{-1}(D(a_1)) \cup \cdots \cup (\text{Spec } \varphi)^{-1}(D(a_n)) \\ &= D(\varphi(a_1)) \cup \cdots \cup D(\varphi(a_n)) \in \mathring{\mathcal{K}}(\text{Spec } B) \end{aligned}$$

となるから, $\text{Spec } \varphi$ は spectral 写像である. □

したがって関手 Spec の像は圏 Spectral に含まれ,



と分解することがわかる. この関手 $\text{Ring}^{\text{op}} \rightarrow \text{Spectral}$ も Spec で表す.

命題 2.8. 環 A に対して, 位相空間 $\text{Spec } A$ の specialization order はイデアルとしての包含順序である. つまり

$$\mathfrak{p} \rightsquigarrow \mathfrak{q} \iff \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}.$$

Proof. $\mathfrak{p} \rightsquigarrow \mathfrak{q} \iff \mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p}) \iff \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ □

命題 2.9. 環 A に対して $X = \text{Spec } A$ と置くと, $\mathcal{B}_{\text{con}} = \{D(a) \cap V(b_1, \dots, b_m) \mid a, b_1, \dots, b_m \in A\}$ は $X_{\text{con}} = (\text{Spec } A)_{\text{con}}$ の開基をなす.

Proof. 系 2.6 より $\mathring{\mathcal{K}}(\text{Spec } A) = \{D(a_1) \cup \cdots \cup D(a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in A\}$ であり, $\overline{\mathcal{K}}(\text{Spec } A) = \{V(b_1) \cap \cdots \cap V(b_m) = V(b_1, \dots, b_m) \mid b_1, \dots, b_m \in A\}$ である. よって $(\text{Spec } A)_{\text{con}}$ は $\{(\bigcup_i D(a_i)) \cap V(b_1, \dots, b_m) \mid a_i, b_j \in A\}$ を開基にもつが, 特に $\{D(a) \cap V(b_1, \dots, b_m) \mid a, b_1, \dots, b_m \in A\}$ も開基にもつ. □

II 章 Hochster の環構成

環 A に対して位相空間 $\text{Spec } A$ が spectral 空間であることを確認した。実はこの逆が成り立ち、Hochster [Hoc69] は、任意の spectral 空間 X に対して $X \cong \text{Spec } H_X$ となるような環 H_X が存在することを示した。すなわち、spectral 空間とは環の素スペクトラルとして表されるような位相空間のクラスに一致する。[Hoc69] では $X \cong \text{Spec } H_X$ となる環 H_X を具体的に構成することで証明を与えている。この章では、この Hochster による環 H_X の構成を紹介する。

3 Space with indeterminates

Hochster の構成を実現する第一歩は、spectral 空間をその上の関数たちのなす環の素スペクトラムの内部で実現することである。そのために必要な概念を導入する。

定義 3.1. space with indeterminates とは、

- spectral 空間 X
- 集合 E
- 写像 $g: E \rightarrow \mathring{\mathcal{K}}(X)$

の組 (X, E, g) であって

- $g(E) = \{g(e)\}_{e \in E}$ は X の準開基である

をみたすもののこと。

例. たとえば、spectral 空間 X に対して、 X の準開基 \mathcal{S}_X で $\mathcal{S}_X \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(X)$ となるものをとれば、組 $(X, \mathcal{S}_X, \iota: \mathcal{S}_X \hookrightarrow \mathring{\mathcal{K}}(X))$ は space with indeterminates である。準開基 \mathcal{S}_X の取り方によって、 X を成分とする space with indeterminates はいくつも存在することに注意する。特に $\mathcal{S}_X = \mathring{\mathcal{K}}(X)$ とすることで、space with indeterminates $(X, \mathring{\mathcal{K}}(X), \text{id})$ が得られる。これを、spectral 空間 X に付随する space with indeterminates と言うことにし、単に $(X, \mathring{\mathcal{K}}(X))$ と書くことにする。

4 Spring

定義 4.1. spring (spectral space and ring) とは、

- spectral 空間 X
- 環 A
- X で添え字づけられた整域 A^x の族 $(A^x)_{x \in X}$

の組 $(X, A, (A^x)_{x \in X})$ であって

- (SR1) A は $\prod_{x \in X} A^x$ の部分環である. $a \in A \subseteq \prod_{x \in X} A^x$ の x 成分を $a(x)$ と書く. $a(X) = \{a(x) \mid x \in X\}$ という記法も使う.
- (SR2) 各 $x \in X$ に対して, 環準同型 $\pi_x: A \rightarrow A^x; a \mapsto a(x)$ は全射である. これを evaluation/projection という. $\pi_x = \text{ev}_x$ とかく.
- (SR3) 各 $a \in A$ に対して, $d(a) := \{x \in X \mid a(x) \neq 0\}$ は X の quasi-compact な開集合である. 補集合を $z(a) = X \setminus d(a) = \{x \in X \mid a(x) = 0\}$ とおく.
- (SR4) $\{d(a)\}_{a \in A}$ は X の準開基をなす. 各 A^x が整域であることから $d(a) \cap d(b) = d(ab)$ がわかり, よって $\{d(a)\}_{a \in A}$ は X の開基にもなる.

をみたすものごと. $\text{spring}(X, A, (A^x)_{x \in X})$ を, 単に $(X, A) = (X, A, (A^x)_{x \in X})$ と書く.

spring の条件 (SR1) は A の元を X 上の関数 (写像) とみなせることを示しており, spring は, 空間とその上の関数のなす環をセットにして考えるという思想に基づく概念である. その他の条件 (SR2)–(SR4) は複雑に見えるかもしれないが, spectral 空間 X を A のスペクトラム $\text{Spec } A$ の中で実現するために必要な条件となっている.

例. 被約な環 A に対して, $X = \text{Spec } A$ と置くとき, 組 $(X, A, (A/x)_{x \in X})$ は spring である.

spring ぐらいの構造があれば, spectral 空間を環のスペクトラムに埋め込めることがわかる. これを確認しよう.

$(X, A, (A^x)_{x \in X})$ を spring とする. 各 $x \in X$ に対して, A^x は整域であるから, 全射準同型 $\pi_x: A \rightarrow A^x$ について $\text{Ker}(\pi_x) \subseteq A$ は素イデアルである. これにより, 写像

$$\Phi = \Phi_A: X \rightarrow \text{Spec } A, \quad x \mapsto \text{Ker}(\pi_x)$$

が定まる.

■ **補題 4.2.** 写像 $\Phi: X \rightarrow \text{Spec } A$ は単射である.

Proof. $x \neq y$ なる $x, y \in X$ を取る. spectral 空間 X は T_0 だから, ある開集合 $U \subseteq X$ が存在して, $x \in U$ かつ $y \notin U$ が成り立つか, または $x \notin U$ かつ $y \in U$ が成り立つ. 簡単のため $x \in U$ かつ $y \notin U$ であるとする. (SR4) より $\{d(a)\}_{a \in A}$ は X の開基だから,

$$\exists a \in A, \quad x \in d(a) \subseteq U$$

となる. このとき $y \notin U$ より $y \notin d(a)$ である. よって $a(x) \neq 0$ かつ $a(y) = 0$ を得る. つまり $a \notin \text{Ker } \pi_x = \Phi(x)$ かつ $a \in \text{Ker } \pi_y = \Phi(y)$ となり, 特に $\Phi(x) \neq \Phi(y)$ である. したがって Φ は単射である. \square

命題 4.3. $\text{spring}(X, A, (A^x)_{x \in X})$ に対して, 単射 $\Phi = \Phi_A$ は spectral 写像であり, さらに X と $\Phi(X)$ との間の同相を与える. ただし $\Phi(X)$ には $\text{Spec } A$ の相対位相をいれて位相空間とする.

Proof. $\text{Spec } A$ の基本開集合 $D(a)$ に対して

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(D(a)) &= \{x \in X \mid \Phi(x) = \text{Ker } \pi_x \in D(a)\} \\ &= \{x \in X \mid a \notin \text{Ker } \pi_x\} \\ &= \{x \in X \mid a(x) \neq 0\} = d(a)\end{aligned}$$

だから $\Phi^{-1}(D(a))$ は quasi-compact な開集合である. 系 2.6 より $\mathring{\mathcal{K}}(\text{Spec } A)$ の元は基本開集合の有限和でかけることから, Φ は spectral 写像であることがわかる. 特に Φ は連続である.

補題 4.2 より Φ は単射で, これによって X と $\Phi(X)$ を集合として同一視すると, $\Phi^{-1}(D(a)) = d(a)$ より

$$d(a) = D(a) \cap \Phi(X)$$

となる. 部分空間 $\Phi(X) \subseteq \text{Spec } A$ の開基として $\{D(a) \cap \Phi(X)\}_{a \in A}$ が取れて, $d(a) = D(a) \cap \Phi(X)$ より Φ を通じて X の開基 $\{d(a)\}_{a \in A}$ と一致するから, 同相 $X \cong \Phi(X)$ を得る. \square

したがって $\text{spring}(X, A)$ があつたとき, 台となる spectral 空間 X は, $\Phi = \Phi_A$ によって $\text{Spec } A$ の spectral subspace とみなせる.

定義 4.4. $\text{spring}(X, A)$ に対して, 上で構成した埋め込み Φ_A が全射のとき, すなわち $X \stackrel{\Phi_A}{\cong} \text{Spec } A$ となるとき, (X, A) は affine であるという.

しかし残念なことに, 一般には Φ_A は全射ではない.

与えられた spectral 空間に対して, space with indeterminates がいくつか作れるが, これから述べるように任意の space with indeterminates に対して spring の構成法が存在するので, すべての spectral 空間はある環のスペクトラムの spectral subspace として実現可能であることがわかる.

space with indeterminates に対して spring を構成しよう. (X, E, g) を space with indeterminates とする. ここで体 k を一つ固定しておく. また $U_e = g(e) \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ という記法も用いる.

- 集合 E で添え字づけられた相異なる不定元の集合を $T_X = \{t_e\}_{e \in E}$ とし, T_X を変数集合にもつ体 k 上の多項式環を $k[T_X] := k[t_e \mid e \in E]$ とする. 各 $e \in E$ に対して, 特性関数 (characteristic function) $\chi_e: X \rightarrow k[T_X]$ を

$$\chi_e(x) = \begin{cases} t_e & (x \in U_e) \\ 0 & (x \notin U_e) \end{cases}$$

で定義する.

- 各 χ_e は直積環 $k[T_X]^X$ の元と思える. $k[T_X]^X$ の部分環として k 上 $\{\chi_e \mid e \in E\}$ で生成される環を

$$A_X := k[\chi_e \mid e \in E] \subseteq k[T_X]^X$$

とする.

- $x \in X$ に対して

$$A^x := \{p(x) \in k[T_X] \mid p \in A_X\}$$

と置く. A_X が k 上 $\{\chi_e\}_{e \in E}$ で生成されることと, $x \notin U_e$ のとき $\chi_e(x) = 0$ となって消えてしまうことから, A^x は $T_x := \{t_e \mid e \in E, x \in U_e\}$ を変数集合とする多項式環

$$A^x = k[T_x] = k[t_e \mid e \in E, x \in U_e] \subseteq k[T_X]$$

になる. 特に A^x は整域である.

こうして構成した環 $A_X = k[\chi_e \mid e \in E]$ と整域 $A^x = k[T_x] \subseteq k[T_X]$ ($x \in X$) について, 次のことが成り立つ.

命題 4.5. (i) 環準同型

$$A_X = k[\chi_e \mid e \in E] \longrightarrow \prod_{x \in X} A^x = \prod_{x \in X} k[T_x], \quad p \mapsto (p(x))_{x \in X}$$

は単射である. よって A は $\prod A^x$ の部分環である.

(ii) 環準同型 $\pi_x: A \rightarrow A^x; p \mapsto p(x)$ は全射である.

Proof. (i) $p, q \in A_X$ について, すべての $x \in X$ に対して $p(x) = q(x)$ であるとする. p, q は X 上の写像として (つまり $k[T_X]^X$ の元として) 一致し, A_X の元としても $p = q$ となる.

(ii) は A^x の定義から明らか. □

命題 4.6. 元 $p \in A_X$ に対して, $d(p) = \{x \in X \mid p(x) \neq 0\}$ は X の quasi-compact な開集合である.

Proof. $p \in A_X$ の形で場合分けして示す.

- p が定数 $\lambda \in k$ の場合, $\lambda = 0$ なら $d(p) = \emptyset$, $\lambda \neq 0$ なら $d(p) = X$ となり, $d(p)$ は quasi-compact な開集合である.
- $p \neq 0$ が $\{\chi_e\}_{e \in E}$ の単項式の形で表せる場合, $p = \lambda \chi_{e_1}^{\alpha_1} \cdots \chi_{e_n}^{\alpha_n}$ ($\lambda \in k \setminus \{0\}$, $e_1, \dots, e_n \in E$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$) とすると,

$$p(x) = \lambda \chi_{e_1}(x)^{\alpha_1} \cdots \chi_{e_n}(x)^{\alpha_n} = \begin{cases} \lambda t_{e_1}^{\alpha_1} \cdots t_{e_n}^{\alpha_n} & (\forall j, x \in U_{e_j}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

だから

$$d(p) = \{x \in X \mid \forall j, x \in U_{e_j}\} = \bigcap_{j=1}^n U_{e_j}$$

となる. よって $U_{e_j} \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ より $d(p) \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ であるから, $d(p)$ は quasi-compact な開集合である.

- $p \neq 0$ が $\{\chi_e\}_{e \in E}$ の多項式の形で表せる場合, $p = \sum_{i=1}^l \lambda_i m_i$ ($\lambda_i \in k \setminus \{0\}$, m_i は相異なる $\{\chi_e\}_{e \in E}$ の単項式で表せる元) とすると, $x \in X$ に対して $m_i(x)$ ($i = 1, \dots, l$) は相異なる不定元となるから

$$p(x) = 0 \iff \forall i, m_i(x) = 0.$$

よって

$$d(p) = d(m_1) \cup \dots \cup d(m_l)$$

となり, 各 $d(m_i)$ が quasi-compact な開集合であることはすでに見たから, $d(p)$ も quasi-compact な開集合である. \square

■ **命題 4.7.** $\{d(p) \mid p \in A_X\}$ は X の準開基をなす.

Proof. $e \in E$ に対して $\chi_e \in A_X$ を考えれば, $d(\chi_e) = U_e$ であるから,

$$g(E) = \{U_e \mid e \in E\} \subseteq \{d(p) \mid p \in A_X\}$$

となる. (X, E, g) は space with indeterminates だったから, $g(E)$ は X の準開基であり, よって $\{d(p) \mid p \in A_X\}$ も X の準開基である. \square

したがって命題 4.5, 4.6, 4.7 より, 組 $(X, A_X, (A^x)_{x \in X})$ は spring となる. これを, space with indeterminates (X, E, g) に付随する spring といい, $(X, A_X) = (X, A_X, (A^x)_{x \in X})$ と書く.

この spring は特に次のような性質をもつ.

■ **命題 4.8.** space with indeterminates (X, E, g) に付随する spring (X, A_X) について, すべての $p \in A_X$ に対し $p(X) \subseteq k[T_X]$ は有限集合である.

Proof. $p \in A_X$ は, $p = \sum_{i=1}^l \lambda_i m_i$ ($\lambda_i \in k$, m_i は $\{\chi_e\}_{e \in E}$ についての単項式) と書ける. 各 m_i は, $m_i = \chi_{e_1}^{\alpha_1} \dots \chi_{e_n}^{\alpha_n}$ とすれば, $x \in \bigcap_{j=1}^n U_{e_j}$ か否かで, $t_{e_1}^{\alpha_1} \dots t_{e_n}^{\alpha_n}$ か 0 かの値しかとらない. よってそのような m_i の線形有限和である p も有限個の値しかとらず, $p(X) \subseteq k[T_X]$ は有限集合である. \square

5 Index on a spring

さらに Hochster の構成に必要な, spring 上の index の概念を導入する.

定義 5.1. $(X, A) = (X, A, (A^x)_{x \in X})$ を spring とする. (X, A) 上の index とは,

- X の specialization $x \rightsquigarrow y$ 全体の集合で添え字づけられた, A^x の商体 $Q(A^x)$ 上の離散付値 $v_{x \rightsquigarrow y}: Q(A^x) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ の族 $v = (v_{x \rightsquigarrow y})_{x \rightsquigarrow y}$

であって,

(IND1) すべての $a \in A$ と specialization $x \rightsquigarrow y$ に対して,

$$v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) \geq 0$$

であり, かつ

$$v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) = 0 \iff a(y) \neq 0$$

が成り立つ

(IND2) すべての $a \in A$ に対して, $\{v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) \mid a(x) \neq 0, x \rightsquigarrow y\} \subseteq \mathbb{Z}$ は有限集合である

をみたすものこと.

定義 5.2. spring (X, A) 上の index $v = (v_{x \rightsquigarrow y})$ が simple index であるとは,

(IND3) すべての A^x ($x \in X$) を含むような体 K が存在して, 任意の $a \in A$ で $a(X) \subseteq K$ が有限集合である

をみたすときをいう.

spring (X, A) とその上の index v の組 $(X, A, v) = ((X, A), v)$ を indexed spring という. さらに v が simple のとき, simply indexed spring という.

前節にて, space with indeterminates から spring を構成した. 加えて, この spring 上に index を定めることができる.

(X, E, g) を space with indeterminates とし, (X, A_X) をこれに付随する spring とする. $A_X = k[\chi_e \mid e \in E]$, $A^x = k[T_x]$ であった.

X の specialization $x \rightsquigarrow y$ を一つ取る. $Q(A^x) = k(T_x)$ 上の離散付値 $v_{x \rightsquigarrow y}$ を次のようにして再帰的に定義する.

- 不定元 $t_e \in T_x$ に対して,

$$v_{x \rightsquigarrow y}(t_e) = \begin{cases} 1 & (y \notin U_e) \\ 0 & (y \in U_e) \end{cases}$$

とする.

- 単項式 $u = t_{e_1}^{\alpha_1} \cdots t_{e_n}^{\alpha_n} \in k[T_x]$ に対して,

$$v_{x \rightsquigarrow y}(u) = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_{x \rightsquigarrow y}(t_{e_j})$$

とする. 特に $v_{x \rightsquigarrow y}(1) = 0$ である.

- 多項式 $0 \neq \sum_{i=1}^l \lambda_i u_i \in k[T_x]$ ($\lambda_i \in k \setminus \{0\}$, u_i は係数 1 の相異なる単項式) に対して,

$$v_{x \rightsquigarrow y}\left(\sum_{i=1}^l \lambda_i u_i\right) = \min\{v_{x \rightsquigarrow y}(u_1), \dots, v_{x \rightsquigarrow y}(u_l)\}$$

とする. 特に $\lambda \in k \setminus \{0\}$ に対して $v_{x \rightsquigarrow y}(\lambda) = v_{x \rightsquigarrow y}(1) = 0$ である.

- $0 \neq f/g \in k(T_x)$ ($f, g \in k[T_x]$, $g \neq 0$) に対して,

$$v_{x \rightsquigarrow y}(f/g) = v_{x \rightsquigarrow y}(f) - v_{x \rightsquigarrow y}(g)$$

とする.

これが離散付値を与えることは明らか. こうして得られた離散付値の族 $v = (v_{x \rightsquigarrow y})$ について, 次のことが成り立つ.

命題 5.3. すべての $p \in A_X$ と $x \rightsquigarrow y$ に対して,

- (i) $v_{x \rightsquigarrow y}(p(x)) \geq 0$
- (ii) $v_{x \rightsquigarrow y}(p(x)) = 0 \iff p(y) \neq 0$

が成り立つ.

Proof. (i) $p(x) \in A_X$ だから $v_{x \rightsquigarrow y}$ の構成より明らか.

(ii) $p \neq 0$ としてよい. $p \in A_X = k[\chi_e \mid e \in E]$ を $p = \sum_i \lambda_i m_i$ ($0 \neq \lambda_i \in k$, $0 \neq m_i \in A_X$ は相異なる) とすると,

$$v_{x \rightsquigarrow y}(p(x)) = v_{x \rightsquigarrow y}\left(\sum_i \lambda_i m_i(x)\right) = 0 \iff \exists i, v_{x \rightsquigarrow y}(m_i(x)) = 0$$

である. この i に対して, $m_i = \chi_{e_1}^{\alpha_1} \cdots \chi_{e_n}^{\alpha_n}$ とすると少なくとも $m_i(x) \neq 0$ より $x \in \bigcap_{j=1}^n U_{e_j}$ であって,

$$\begin{aligned} v_{x \rightsquigarrow y}(m_i(x)) = 0 &\iff \forall j, v_{x \rightsquigarrow y}(\chi_{e_j}(x)) = v_{x \rightsquigarrow y}(t_{e_j}) = 0 \\ &\iff \forall j, y \in U_{e_j} \\ &\iff y \in \bigcap_{j=1}^n U_{e_j} \\ &\iff m_i(y) \neq 0. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} v_{x \rightsquigarrow y}(p(x)) = 0 &\iff \exists i, v_{x \rightsquigarrow y}(m_i(x)) = 0 \\ &\iff \exists i, m_i(y) \neq 0 \\ &\iff p(y) \neq 0 \end{aligned}$$

となる. □

命題 5.4. $p \in A_X$ に対して, $\{v_{x \rightsquigarrow y}(p(x)) \mid p(x) \neq 0, x \rightsquigarrow y\} \subseteq \mathbb{Z}$ は有限集合である.

Proof. 命題 4.8 により, $p(X) \subseteq k[T_X]$ は有限集合である. つまり $p(x)$ として取り得る値は有限個だから, $\{v_{x \rightsquigarrow y}(p(x)) \mid p(x) \neq 0, x \rightsquigarrow y\}$ も有限集合である. □

命題 5.5. space with indeterminates (X, E, g) に付随する spring (X, A_X) に対して, 上で構成した離散付値の族 $v = (v_{x \rightsquigarrow y})$ は, (X, A_X) 上の simple index となる.

Proof. 命題 5.3, 5.4 により, v は (X, A_X) 上の index となる. さらにすべての $A^x = k[T_x] \subseteq k[T_X]$ は体 $K = k(T_X)$ に含まれ, 命題 4.8 より任意の $p \in A_X$ に対し $p(X) \subseteq k[T_X] \subseteq K$ は有限集合であるから, v は simple index である. □

こうして simply indexed spring (X, A_X, v) が得られる. これを space with indeterminates (X, E, g) に付随する simply indexed spring という.

6 Hochster の構成

3 節, 4 節および 5 節で見たように, spectral 空間 X が与えられたとき, X を底空間にもつような simply indexed spring (X, A_X) が構成できて, spectral 写像 Φ_{A_X} によって X は $\text{Spec } A_X$ の spectral subspace として埋め込むことができる. もしこの Φ_{A_X} が全射であれば (つまり (X, A_X) が affine であれば), $X \cong \text{Spec } A_X$ となり Hochster の構成は終了することになる. しかし, 一般には Φ_{A_X} は全射ではない.

Hochster [Hoc69] は, このような affine でない spring から, 底空間 X を変えないで affine な spring を構成することで, $X \cong \text{Spec } H_X$ となる環 H_X を与えている. この節では, この構成を紹介する.

6.1 Strategy for the construction

$(X, A) = (X, A, (A^x)_{x \in X})$ を spring とし, 埋め込み $\Phi = \Phi_A$ は全射でないとする.

このとき $\Phi(X)$ は $\text{Spec } A$ の spectral subspace であり, 命題 1.21 より constructible 位相で閉集合である. よって $\text{Spec } A \setminus \Phi(X) \neq \emptyset$ は constructible 位相で開集合であり, 命題 2.9 より $\mathcal{B}_{\text{con}} = \{V(a_1, \dots, a_n) \cap D(b) \mid a_1, \dots, a_n, b \in A\}$ は $(\text{Spec } A)_{\text{con}}$ の開基をなすことから, $\emptyset \neq C = V(a_1, \dots, a_n) \cap D(b) \subseteq \text{Spec } A \setminus \Phi(X)$ ($a_1, \dots, a_n, b \in A$) となる集合 C が取れる. こ

のような集合 C を $\text{Spec } A$ の hole と呼ぶことにしよう. Φ が全射であるためには, 少なくともこのような hole は余分な部分であり, 取り除かねばならない.

$\text{Spec } A$ の部分集合 $C = V(a_1, \dots, a_n) \cap D(b)$ が hole であるとは,

$$C \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad C \cap \Phi(X) = \emptyset$$

ということである. ここで単射 Φ によって X と $\Phi(X)$ を同一視したとき

$$d(b) = D(b) \cap \Phi(X)$$

であったことを思い出そう (命題 4.3 の証明を参照). よって $a_1, \dots, a_n \in A$ に対して $z(a_1, \dots, a_n) := \bigcap_{i=1}^n z(a_i)$ と置くと

$$z(a_1, \dots, a_n) = V(a_1, \dots, a_n) \cap \Phi(X)$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} C = V(a_1, \dots, a_n) \cap D(b) = \emptyset &\iff V(a_1, \dots, a_n) \subseteq \text{Spec } A \setminus D(b) = V(b) \\ &\iff \text{rad}(b) \subseteq \text{rad}(a_1, \dots, a_n) \\ &\iff b \in \text{rad}(a_1, \dots, a_n) \\ V(a_1, \dots, a_n) \cap D(b) \cap \Phi(X) = \emptyset &\iff (V(a_1, \dots, a_n) \cap \Phi(X)) \cap (D(b) \cap \Phi(X)) = \emptyset \\ &\iff z(a_1, \dots, a_n) \cap d(b) = \emptyset \\ &\iff z(a_1, \dots, a_n) \subseteq X \setminus d(b) = z(b) \end{aligned}$$

となる. したがって $C = V(a_1, \dots, a_n) \cap D(b) \subseteq \text{Spec } A$ が hole であるとは,

$$b \notin \text{rad}(a_1, \dots, a_n) \quad \text{かつ} \quad z(a_1, \dots, a_n) \subseteq z(b) \quad (*)$$

が成り立つことと同値である.

したがって次の定理を得る.

定理 6.1 ([Hoc69, Theorem 2]). $\text{spring}(X, A)$ に対して, (X, A) が affine である必要十分条件は, すべての $a_1, \dots, a_n, b \in A$ に対して

$$z(a_1, \dots, a_n) \subseteq z(b) \implies b \in \text{rad}(a_1, \dots, a_n)$$

が成り立つことである.

Proof. (X, A) が affine ならば, $\Phi(X) = \text{Spec } A$ であり $d(b) = D(b) \cap \Phi(X) = D(b)$ であるから,

$$V(a_1, \dots, a_n) = z(a_1, \dots, a_n) \subseteq z(b) = V(b)$$

のとき $b \in \text{rad}(b) \subseteq \text{rad}(a_1, \dots, a_n)$ を得る.

(X, A) が affine でなければ, 上の議論から $\text{Spec } A$ の hole $C = V(a_1, \dots, a_n) \cap D(b)$ が存在するが, このとき (*) が成り立つので主張の条件は成立しない. \square

しかしこの条件をみたす spring を構成することが難しいのである.

6.2 Step 1: v -extension condition

ひとまずは, $C = V(a) \cap D(b)$ という形の hole C をすべて切除することを目指そう. 環を拡大することによって, spectral 空間 X の埋め込まれているスペクトラムを小さく取り代えていくことを考える.

定義 6.2. $(X, A, (A^x)_{x \in X})$ を spring とし, v を (X, A) 上の index とする. 整域 A^x の商体を $Q(A^x)$ とし, $\Omega := \prod_{x \in X} Q(A^x)$ と置く. spring の定義から A は Ω の部分環 $A \subseteq \prod_{x \in X} A^x \subseteq \Omega$ とみなせる. そこで A の元に限らず, $\omega \in \Omega$ に対してその x 成分を $\text{ev}_x(\omega) = \omega(x) \in Q(A^x)$ と書くことにする.

このとき, A を含む部分環 $B \subseteq \Omega$ が A の v -拡大 (v -extension) であるとは,

(i) 各 $x \in X$ に対し

$$B^x = \text{ev}_x(B) = \{\omega(x) \in Q(A^x) \mid \omega \in B\} \subseteq Q(A^x)$$

として, $(X, B, (B^x)_{x \in X})$ は spring をなす

(ii) v は spring (X, B) 上の index になる

をみたすときをいう. $A \subseteq B$ より $A^x \subseteq B^x$ であり, $Q(A^x) = Q(B^x)$ であることに注意する.

indexed spring (X, A, v) に対し, $\text{Spec } A$ の hole $C = V(a) \cap D(b)$ を考える. (*) よりこれは

$$b \notin \text{rad}(a) \quad \text{かつ} \quad z(a) \subseteq z(b)$$

をみたすものであった.

$a, b \in A$ に対して $z(a) \subseteq z(b)$ のとき,

$$\forall x \in X, \quad a(x) = 0 \implies b(x) = 0$$

が成り立つ. そこで, 元 $b//a \in \prod_{x \in X} Q(A^x) = \Omega$ を

$$(b//a)(x) = \begin{cases} \frac{b(x)}{a(x)} & (a(x) \neq 0) \\ 0 & (a(x) = 0) \end{cases}$$

と定めれば, Ω の元として

$$b = a \cdot (b//a)$$

が成り立つ. 定義から

$$(b//a)(x) \neq 0 \iff b(x) \neq 0$$

であることがわかる.

このとき Ω の部分環として A 上 $b//a \in \Omega$ で生成される環 $A' = A[b//a]$ を考える. 次の定理は, この環 $A' \subseteq \Omega$ が A の v -extension であるための特徴づけを与える.

定理 6.3 ([Hoc69, Theorem 3]). (X, A, v) を indexed spring とする. $z(a) \subseteq z(b)$ となる $a, b \in A$ に対して, 次は同値である.

- (a) $A' = A[b//a] \subseteq \Omega$ は A の v -extension である.
- (b) $b(x) \neq 0$ なる任意の specialization $x \rightsquigarrow y$ に対して

$$v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)) \geq v_{x \rightsquigarrow y}(a(x))$$

であり, かつ

$$v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)) = v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) \implies a(y) \neq 0$$

$$\left(\stackrel{\text{(IND1)}}{\iff} v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) = 0 \right)$$

が成り立つ.

この定理の証明は以下に続くようにいくぶん長く, この小節の終わりまで続く. 素直に確かめるべきことを確かめれば証明できる.

Proof. (a) \implies (b): $b(x) \neq 0$ なる specialization $x \rightsquigarrow y$ を任意に取る. 今 $z(a) \subseteq z(b)$ だから, $b(x) \neq 0$ より $a(x) \neq 0$ である. v は (X, A') 上の index であるから, $b//a \in A'$ に対して (IND1) より

$$v_{x \rightsquigarrow y}((b//a)(x)) = v_{x \rightsquigarrow y}((b(x)/a(x))) = v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)) - v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) \geq 0$$

となり, $v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)) \geq v_{x \rightsquigarrow y}(a(x))$ が従う. さらに $v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)) = v_{x \rightsquigarrow y}(a(x))$ だとすると, $v_{x \rightsquigarrow y}((b//a)(x)) = 0$ であり, (IND1) より $(b//a)(y) \neq 0$ となる. よって定義から $a(y) \neq 0$ である.

(b) \implies (a): $A'^x = \text{ev}_x(A') = \{p'(x) \in Q(A^x) \mid p' \in A'\}$ とおくと, これは整域である. 示すべきことは, (i) $(X, A', (A'^x)_{x \in X})$ が spring をなすことと, (ii) v が (X, A') 上の index となること, の二つである.

(i) $(X, A', (A'^x)_{x \in X})$ に対して, 条件 (SR1) と (SR2) が成り立つことは明らかである. もし (SR3) が成り立てば, $A \subseteq A'$ より $\{d(p)\}_{p \in A} \subseteq \{d(p')\}_{p' \in A'} \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(X)$ であり, $\{d(p)\}_{p \in A}$ が X の準開基だから $\{d(p')\}_{p' \in A'}$ も X の準開基となるので, (SR4) が成り立つ. したがって (SR3) が成り立つことを示せばよい.

まず, $p' \in A'$ に対して, $d(p') = \{x \in X \mid p'(x) \neq 0\}$ が X の quasi-compact な部分集合であることを示そう. $A' = A[b//a]$ より

$$p' = a_n(b//a)^n + \cdots + a_1(b//a) + a_0 \quad (a_0, \dots, a_n \in A) \quad (1)$$

と表せる. すると $b = a \cdot (b//a)$ より, 両辺に a^n をかけて

$$a^n p' = a_n b^n + \cdots + a_1 b a^{n-1} + a_0 a^n$$

となる. 特に左辺は A の元だから, $a^n p' \in A$ である. 各 $x \in X$ について,

- $x \in z(a)$ つまり $a(x) = 0$ なら, $(b//a)(x) = 0$ だから $p'(x) = a_0(x)$ である. よって $d(p') \cap z(a) = d(a_0) \cap z(a)$ となる
- $x \in d(a)$ つまり $a(x) \neq 0$ なら, A^x が整域であることから $p'(x) \neq 0 \Leftrightarrow (a^n p')(x) = a(x)^n p'(x) \neq 0$ である. よって $d(p') \cap d(a) = d(a^n p') \cap d(a)$ となる

であるから, $d(a) \cup z(a) = X$ より

$$d(p') = (d(a_0) \cap z(a)) \cup (d(a^n p') \cap d(a)) \quad (2)$$

となる. $a_0, a, a^n p' \in A$ で (X, A) が spring だから, $d(a_0), d(a), d(a^n p')$ は X の quasi-compact な開集合である. よってこのことから $d(p')$ は X_{con} の閉集合であることがわかり, 命題 1.21 より特に $d(p')$ は X の quasi-compact な部分集合である.

次に, $p' \in A'$ に対して, $d(p')$ が X の開集合であることを示そう. $z(p') = \{x \in X \mid p'(x) = 0\} \subseteq X$ が閉集合であることを示したい. ここで, (2) より

$$z(p') = (z(a_0) \cap z(a)) \cup (z(a^n p') \cap d(a))$$

であり, これは X_{con} の閉集合である. $y \in \overline{z(p')}$ を任意にとる (ただし $\overline{z(p')}$ は spectral 位相での閉包を表す. 以下同様である). 補題 1.22 より, ある $x \in z(p')$ が存在して $y \in \overline{\{x\}}$ つまり $x \rightsquigarrow y$ となる. このときに $y \in z(p')$ となれば, $z(p')$ が X の閉集合であることがわかる. よって

$$x \in z(p'), x \rightsquigarrow y \implies y \in z(p')$$

を示せばよい.

$x \in z(p'), x \rightsquigarrow y$ なる $x, y \in X$ を考える. $x \in z(p')$ より,

$$x \in z(a_0) \cap z(a), \quad \text{または} \quad x \in z(a^n p') \cap d(a)$$

である.

- $x \in z(a_0) \cap z(a)$ のとき, $a_0, a \in A$ より $z(a_0), z(a)$ は X の閉集合であり, よって

$$y \in \overline{\{x\}} \subseteq z(a_0) \cap z(a) \subseteq z(p')$$

となる.

- $x \in z(a^n p') \cap d(a)$ かつ $y \in d(a)$ のとき, $a^n p' \in A$ より $z(a^n p')$ は X の閉集合で, $y \in \overline{\{x\}} \subseteq z(a^n p')$ であるから, $y \in z(a^n p') \cap d(a) \subseteq z(p')$ がわかる.
- $x \in z(a^n p') \cap d(a)$ かつ $y \notin d(a)$ のときを考える. このとき $y \in z(a_0) \cap z(a)$ となることを示す. 今 $y \in z(a)$ だから $y \in z(a_0)$ がわかればよい. $x \in z(p')$ より $p'(x) = 0$ であり, かつ $x \in d(a)$ より $a(x) \neq 0$ で $(b//a)(x) = b(x)/a(x)$ となるから, (1) の表示を用いて

$$\begin{aligned} 0 &= p'(x) = a_n(x) \left(\frac{b(x)}{a(x)} \right)^n + \cdots + a_1(x) \left(\frac{b(x)}{a(x)} \right) + a_0(x) \\ \therefore -a_0(x) &= a_n(x) \left(\frac{b(x)}{a(x)} \right)^n + \cdots + a_1(x) \left(\frac{b(x)}{a(x)} \right) \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$v_{x \rightsquigarrow y} \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) \left(\frac{b(x)}{a(x)} \right)^i \right) = v_{x \rightsquigarrow y}(-a_0(x)) = v_{x \rightsquigarrow y}(a_0(x))$$

である。 v は (X, A) の index だから、 $a(y) = 0$ より $v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) \neq 0$ であり、 また仮定 **(b)** から $b(x) \neq 0$ なら $v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)) > v_{x \rightsquigarrow y}(a(x))$ とわかる。 $a(x) \neq 0$ より $v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) \neq \infty$ だから、 これは $b(x) = 0$ を含めて成立しているとしてよい。 よって

$$v_{x \rightsquigarrow y} \left(\frac{b(x)}{a(x)} \right) = v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)) - v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) > 0$$

となる。 したがって $a_i \in A$ より $v_{x \rightsquigarrow y}(a_i(x)) \geq 0$ に注意して

$$\begin{aligned} v_{x \rightsquigarrow y}(a_0(x)) &= v_{x \rightsquigarrow y} \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) \left(\frac{b(x)}{a(x)} \right)^i \right) \\ &\geq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ v_{x \rightsquigarrow y} \left(a_i(x) \left(\frac{b(x)}{a(x)} \right)^i \right) \right\} \\ &= \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ v_{x \rightsquigarrow y}(a_i(x)) + i \cdot v_{x \rightsquigarrow y} \left(\frac{b(x)}{a(x)} \right) \right\} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となり、 v は (X, A) の index だから $a_0(y) = 0$ 、 すなわち $y \in z(a_0)$ を得る。

以上より (X, A') が spring をなすことが示せた。

(ii) v が (X, A') 上の index にもなることを確認しよう。 条件 (IND1) と (IND2) が成り立つことを示す。

(IND1) 元 $p' \in A'$ と specialization $x \rightsquigarrow y$ を任意にとる。

$$p' = a_n(b//a)^n + \cdots + a_1(b//a) + a_0 \quad (a_0, \dots, a_n \in A)$$

と表すと

$$v_{x \rightsquigarrow y}(p'(x)) \geq \min_{0 \leq i \leq n} \left\{ v_{x \rightsquigarrow y} \left(a_i(x)(b//a)(x)^i \right) \right\}$$

である。 仮定 **(b)** より、 $b(x) = 0$ の場合も含めて $v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)) \geq v_{x \rightsquigarrow y}(a(x))$ が成り立つから、 $v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)/a(x)) \geq 0$ となる。 よって、 $v_{x \rightsquigarrow y}(p'(x)) \geq 0$ を得る。 また、

- $b(y) = 0$ かつ $b(x) \neq 0$ のとき、 $v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)) > 0$ であり仮定 **(b)** から $v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) < v_{x \rightsquigarrow y}(b(x))$ となる。 $b(x) \neq 0$ より $a(x) \neq 0$ であるから、

$$v_{x \rightsquigarrow y}(p'(x)) \geq \min_{0 \leq i \leq n} \left\{ v_{x \rightsquigarrow y}(a_i(x)) + i \cdot v_{x \rightsquigarrow y} \left(\frac{b(x)}{a(x)} \right) \right\}$$

で、 $i \geq 1$ に対しては $v_{x \rightsquigarrow y}(a_i(x)) + i \cdot v_{x \rightsquigarrow y} \left(\frac{b(x)}{a(x)} \right) > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} v_{x \rightsquigarrow y}(p'(x)) = 0 &\iff v_{x \rightsquigarrow y}(a_0(x)) = 0 \\ &\iff p'(y) = a_0(y) \neq 0 \end{aligned}$$

となる.

- $b(y) = b(x) = 0$ のとき, $p'(x) = a_0(x)$ だから, 同様にして

$$v_{x \rightsquigarrow y}(p'(x)) = 0 \iff p'(y) \neq 0$$

を得る.

- $b(y) \neq 0$ のとき, $z(a) \subseteq z(b)$ より $a(y) \neq 0$ であるから $v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) = 0$ となる. よって

$$v_{x \rightsquigarrow y}((a^n p')(x)) = n v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) + v_{x \rightsquigarrow y}(p'(x)) = v_{x \rightsquigarrow y}(p'(x))$$

を得る. A^y が整域だから, $a(y) \neq 0$ のとき

$$p'(y) \neq 0 \iff (a^n p')(y) \neq 0$$

である. よって

$$\begin{aligned} v_{x \rightsquigarrow y}(p'(x)) = v_{x \rightsquigarrow y}((a^n p')(x)) = 0 &\iff (a^n p')(y) \neq 0 \\ &\iff p'(y) \neq 0 \end{aligned}$$

となる.

したがって条件 (IND1) は成り立つ.

(IND2) 元 $p' \in A'$ を任意に取る.

$$p' = a_n(b//a)^n + \cdots + a_1(b//a) + a_0 \quad (a_0, \dots, a_n \in A)$$

と表す. $c \in A$ を

$$c = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} a + \cdots + a_1 b a^{n-1} + a_0 a^n$$

とおく. v は (X, A) 上の index だから, $a_0, c \in A$ に対して

$$\begin{aligned} \exists N_{a_0} \geq 0, \quad \forall x \rightsquigarrow y, \quad a_0(x) \neq 0 &\implies v_{x \rightsquigarrow y}(a_0(x)) \leq N_{a_0} \\ \exists N_c \geq 0, \quad \forall x \rightsquigarrow y, \quad c(x) \neq 0 &\implies v_{x \rightsquigarrow y}(c(x)) \leq N_c \end{aligned}$$

となる. $N = \max\{N_{a_0}, N_c\}$ とおく.

$p'(x) \neq 0$ なる specialization $x \rightsquigarrow y$ を考える.

- $b(x) = 0$ のとき, $p'(x) = a_0(x)$ であるから, $v_{x \rightsquigarrow y}(p'(x)) \leq N_{a_0} \leq N$ となる.
- $b(x) \neq 0$ のとき, $z(a) \subseteq z(b)$ より $a(x) \neq 0$ である. これより

$$\begin{aligned} p'(x) &= a_n(x) \left(\frac{b(x)}{a(x)} \right)^n + \cdots + a_1(x) \left(\frac{b(x)}{a(x)} \right) + a_0(x) \\ &= \frac{c(x)}{a(x)^n} \end{aligned}$$

となり, よって

$$v_{x \rightsquigarrow y}(p'(x)) = v_{x \rightsquigarrow y}(c(x)) - n v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) \leq v_{x \rightsquigarrow y}(c(x)) \leq N_c \leq N$$

となる.

したがって $\{v_{x \rightsquigarrow y}(p'(x)) \mid x \rightsquigarrow y, p'(x) \neq 0\} \subseteq \mathbb{Z}$ は高々有界で、有限集合となる。

以上より v が (X, A') 上の index であることも示せた。 \square

6.3 Step 2: cutting out holes of the form $V(a) \cap D(b)$

定義 6.4. (X, A, v) を indexed spring とする。 A の元 $a, b \in A$ に対して、 $z(a) \subseteq z(b)$ でありかつ $A[b//a]$ が (X, A) の v -extension であるとき、組 (a, b) は admissible pair であるという。定理 6.3 より、 (a, b) が admissible pair であることと、 $z(a) \subseteq z(b)$ かつ定理の条件 (b) をみたすことは同値である。

indexed spring (X, A, v) に対して、 admissible pair 全体の集合を

$$G(A, v) := \{(a, b) \in A \times A \mid (a, b) \text{ は admissible pair}\}$$

とおく。条件 $z(a) \subseteq z(b)$ や定理 6.3 の (b) は、 $A \subseteq A' \subseteq \Omega$ なる v -extension A' に取り代えても変わらない主張であることに注意しよう。つまり

$$G(A', v) \cap (A \times A) = G(A, v)$$

が成り立つ。この事実が定理 6.3 の嬉しいところである。

定理 6.3 を繰り返し用いれば、有限部分集合 $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\} \subseteq G(A, v)$ に対して

$$A' = A[b_i//a_i \mid i = 1, \dots, n]$$

も A の v -extension となることがわかる。

補題 6.5. indexed spring (X, A, v) に対して、

$$A_1 := A[G(A, v)] := A[b//a \mid (a, b) \in G(A, v)] \subseteq \Omega$$

は (X, A) の v -extension である。

Proof. まず (X, A_1) が spring であることを確認しよう。条件 (SR1), (SR2) および (SR4) をみたすことは明らかである。 $q \in A_1$ を任意にとると、有限個の元 $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in G(A, v)$ が存在して $q \in A[b_i//a_i \mid i = 1, \dots, n] \subseteq A_1$ となっている。よって $A[b_i//a_i \mid i = 1, \dots, n]$ は (X, A) の v -extension であるから、 $d(q)$ は X の quasi-compact な開集合になっている。したがって (SR3) も成り立ち、 (X, A_1) は spring をなす。

次に v が (X, A_1) 上の index であることを確認する。これも、各 $q \in A_1$ に対して $q \in A[b_i//a_i \mid i = 1, \dots, n] \subseteq A_1$ となる $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in G(A, v)$ をとって考えれば、 v が $(X, A[b_i//a_i \mid i = 1, \dots, n])$ 上の index であることより従う。 \square

indexed spring (X, A, v) に対し、新たに $A \subseteq A_1$ となる indexed spring (X, A_1, v) が得られた。 $A_0 = A$ と書くとき、この操作を帰納的に繰り返せば、 v -extension の列

$$A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \dots \subseteq \Omega$$

が得られる。このとき

$$M(A) := M(A, v) := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \Omega$$

と置けば、補題 6.5 と同様に考えて (X, A) の v -extension となることがわかる。この $M(A, v)$ は、 v -extension を誘導する $b//a$ を加える操作に関して閉包を取ったような環になっている。この環こそ、 $C = V(a) \cap D(b)$ の形の hole C がすべて切除されるくらい小さいスペクトラムを与える環になっている。

定理 6.6 ([Hoc69, Proposition 1]). (X, A, v) を indexed spring とする。上で構成した v -extension $M(A, v)$ に対して、

$$\forall a, b \in M(A, v), \quad z(a) \subseteq z(b) \implies b \in \text{rad}(a)$$

が成り立つ。すなわち、(*) より $\text{Spec}(M(A, v))$ は切除するべき $V(a) \cap D(b)$ の形の hole を持たない。

Proof. $a, b \in M(A, v)$ が $z(a) \subseteq z(b)$ をみたすとする。 $M(A, v) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ だから、ある n が存在して $a, b \in A_n$ となる。すると (X, A_n, v) は indexed spring より

$$\exists N > 0, \quad \forall x \rightsquigarrow y, \quad a(x) \neq 0 \implies v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) \leq N$$

となる。このとき、 $(a, b^{N+1}) \in A_n \times A_n$ が admissible pair であることを示そう。明らかに $z(a) \subseteq z(b^{N+1})$ である。

$b(x) \neq 0$ なる specialization $x \rightsquigarrow y$ を任意にとると、 $a(x) \neq 0$ であって

$$v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)^{N+1}) = (N+1)v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)) \geq (v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) + 1)v_{x \rightsquigarrow y}(b(x))$$

となる。

- $b(y) = 0$ のとき、 $v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)) > 0$ であるから

$$v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)^{N+1}) \geq v_{x \rightsquigarrow y}(a(x)) + 1 > v_{x \rightsquigarrow y}(a(x))$$

となる。

- $b(y) \neq 0$ のとき、 $a(y) \neq 0$ であり $v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)^{N+1}) = v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)) = 0 = v_{x \rightsquigarrow y}(a(x))$ となる。

これらを合わせて、

$$v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)^{N+1}) \geq v_{x \rightsquigarrow y}(a(x))$$

が得られる。さらに $v_{x \rightsquigarrow y}(b(x)^{N+1}) = v_{x \rightsquigarrow y}(a(x))$ のとき、上の場合分けより $b(y) \neq 0$ となり、 $a(y) \neq 0$ を得る。したがって定理 6.3 の (b) が成り立ち、 (a, b^{N+1}) は admissible pair である。

よって $(a, b^{N+1}) \in G(A_n, v)$ であり、 $A_{n+1} = A_n[G(A_n, v)]$ であったから $b^{N+1} // a \in A_{n+1} \subseteq M(A, v)$ となる。このとき、 $b^{N+1} = a \cdot (b^{N+1} // a) \in aM(A, v) = (a)$ となるから、 $b \in \text{rad}(a)$ を得る。 \square

6.4 Step 3: cutting out the remainder

indexed spring (X, A, v) から、環を拡大することによって $V(a) \cap D(b)$ の形の hole を持たないスペクトラムを与える indexed spring を構成できることはわかったが、このように構成した indexed spring には、 $V(a_1, \dots, a_n) \cap D(b)$ ($n > 1$) という形の hole がまだ残っている可能性も考えられる。

しかし、index v が simple であれば、すでにすべての hole を切除できていることがわかる。

命題 6.7 ([Hoc69, Theorem 4]). indexed spring (X, A, v) に対して、 v が simple index のとき

$$\forall a_1, \dots, a_n \in A, \quad \exists a \in A, \quad z(a_1) \cap \dots \cap z(a_n) = z(a)$$

が成り立つ。

Proof. $n = 2$ で示せば、あとは帰納的にわかる。 $a, a' \in A$ をとる。 $z(a) = X$ または $z(a') = X$ なら、 $z(a) \cap z(a') = z(a')$ または $z(a) \cap z(a') = z(a)$ となるので良い。

$z(a) \neq X$ かつ $z(a') \neq X$ とする。 v は simple index であるから、すべての A^x を含むような体 K が存在し、 $a(X), a'(X) \subseteq K$ は有限集合となる。 よって $a(X) \setminus \{0\} = \{u_1, \dots, u_m\}$ とすると、集合 $d(a)$ は

$$d(a) = a^{-1}(u_1) \cup \dots \cup a^{-1}(u_m) \subseteq X$$

と分割できる。各 $a^{-1}(u_i)$ から一つずつ元をとって、 $x_i \in a^{-1}(u_i)$ ($i = 1, \dots, m$) とする。 a' に対しても同様に元 $z_j \in a'^{-1}(u_j)$ ($j = 1, \dots, m'$) を取っておく。さらに

$$W_{ij} = \{y \in X \mid a(y) = a(x_i), a'(y) = a'(z_j)\} = a^{-1}(a(x_i)) \cap a'^{-1}(a'(z_j))$$

とおき、 $W_{ij} \neq \emptyset$ のときは元 $y_{ij} \in W_{ij}$ を取って固定する。こうして取ってきた X の元の集合を

$$Y = \{x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_{m'}\} \cup \{y_{ij}\}_{ij, W_{ij} \neq \emptyset}$$

とする。 Y は有限集合である。さて、

$$S = \{a^{k_1} a^{l_1} + \dots + a^{k_n} a^{l_n} \mid k_1, l_1, \dots, k_n, l_n, n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \subseteq A$$

とおく。 $y \in Y$ に対して、 $a(y)$ と $a'(y)$ のいずれかは 0 でないから、

$$S \not\subseteq \Phi_A(y) = \text{Ker}(\pi_y) = \{b \in A \mid b(y) = 0\}$$

である。各 $\Phi_A(y)$ は素イデアルで、 S は和と積で閉じるから、

$$S \not\subseteq \bigcup_{y \in Y} \Phi_A(y) = \{b \in B \mid \exists y \in Y, b(y) = 0\}$$

となる。

∴) 和と積で閉じるような環 A の部分集合 S と有限個の素イデアル \mathfrak{p}_i ($i = 1, \dots, n$) に対して, $S \subseteq \bigcup_i \mathfrak{p}_i$ ならば, ある i が存在して $S \subseteq \mathfrak{p}_i$ となることを示そう. (cf. [Bou06, Chapter 2, §1, Proposition 2])

n についての帰納法により証明する. $n = 1$ のときは明らかに成り立つ. $n \geq 2$ とし, $n - 1$ 個の素イデアルに対しては主張が成り立つとする. $S \subseteq \bigcup_i \mathfrak{p}_i$ とする.

まず, すべての j で $S \cap \mathfrak{p}_j \not\subseteq \bigcup_{i \neq j} \mathfrak{p}_i$ が成り立つとする. 各 j に対して $y_j \notin \bigcup_{i \neq j} \mathfrak{p}_i$ なる $y_j \in S \cap \mathfrak{p}_j$ が取れる. このとき $z = y_1 + y_2 \cdots y_n$ とおくと, S は和と積で閉じるから $z \in S$ である. $j = 2, \dots, n$ に対して, $y_2 \cdots y_n \in \mathfrak{p}_j$ であるが, $y_1 \notin \mathfrak{p}_j$ だから $z \notin \mathfrak{p}_j$ となる. $j = 1$ のとき, $y_2, \dots, y_n \notin \mathfrak{p}_1$ より $y_2 \cdots y_n \notin \mathfrak{p}_j$ であるが, $y_1 \in \mathfrak{p}_1$ だから $z \notin \mathfrak{p}_1$ となる. しかしこれでは $S \subseteq \bigcup_i \mathfrak{p}_i$ に矛盾する.

よって $S \cap \mathfrak{p}_j \subseteq \bigcup_{i \neq j} \mathfrak{p}_i$ となる j が存在する. このとき $S = \bigcup_i (S \cap \mathfrak{p}_i) \subseteq \bigcup_{i \neq j} \mathfrak{p}_i$ となり, 帰納法の仮定からある i ($i \neq j$) が存在して $S \subseteq \mathfrak{p}_i$ となる.

したがって, すべての $y \in Y$ で $s(y) \neq 0$ となるような $s \in S$ が存在する. $w \in d(a) \cup d(a')$ を取るとき,

- $a(w) \neq 0$ かつ $a'(w) = 0$ のとき, $a(w) = a(x_i)$ となる $x_i \in Y$ が存在し, $s(w) = s(x_i) \neq 0$ となる
- $a(w) = 0$ かつ $a'(w) \neq 0$ のとき, $a'(w) = a'(z_j)$ となる $z_j \in Y$ が存在し, $s(w) = s(z_j) \neq 0$ となる.
- $a(w) \neq 0$ かつ $a'(w) \neq 0$ のとき, $a(w) = a(x_i)$ かつ $a'(w) = a'(z_j)$ なる i, j が存在し, 特に $W_{ij} \neq \emptyset$ である. よって $y_{ij} \in Y$ がとれて, このとき $s(w) = s(y_{ij}) \neq 0$ となる.

よっていずれにせよ $w \in d(s)$ であり, $d(a) \cup d(a') \subseteq d(s)$ となる. 明らかに $z(a) \cap z(a') \subseteq z(s)$ が成り立つから $z(a) \cap z(a') = z(s)$ を得る. \square

定理 6.8 ([Hoc69, Theorem 4]). simply indexed spring (X, A, v) に対して,

Φ_A が全射である \iff 任意の $a, b \in A$ に対して, $z(a) \subseteq z(b)$ ならば $b \in \text{rad}(a)$ である.

特に, $\text{Spec } A$ が $V(a) \cap D(b)$ の形の hole を持たなければ, (X, A) は affine となる.

Proof. 定理 6.1 と命題 6.7 より従う. \square

系 6.9 ([Hoc69, Theorem 4]). simply indexed spring (X, A, v) に対して, 定理 6.6 の v -extension $M(A, v)$ は simply indexed spring $(X, M(A, v), v)$ を誘導し, $(X, M(A, v))$ は affine である.

Proof. 定理 6.6 と定理 6.8 から, v が $(X, M(A, v))$ 上の simple index であることを示せばよい.

v は (X, A) 上の simple index だから, すべての A^x ($x \in X$) を含むような体 K が存在して, 任

意の $a \in A$ について $a(X) \subseteq K$ が有限集合となっている。 $M(A, v)$ は A の v -extension だから、 $M(A, v)^x \subseteq Q(M(A, v)^x) = Q(A^x) \subseteq K$ となっている。

任意の n に対して、すべての $q \in A_n$ で $q(X) \subseteq K$ が有限集合となることを示そう。 $n = 1$ の場合のみ示せば、あとは帰納的に従う。 $q \in A_1$ とすると、 $A_1 = A[G(A, v)]$ より、有限個の元 $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k) \in G(A, v)$ が存在して、 q は $b_i // a_i$ ($i = 1, \dots, k$) に関する A 上の多項式の形となる。 $b_i // a_i$ も q を多項式の形で表したときの係数も、有限個の値しかとらないから、 q も高々有限個の値しかとらず、 $q(X) \subseteq K$ は有限集合である。

よって、 $p \in M(A, v)$ を任意にとるとき、ある $n \geq 0$ が存在して $p \in A_n$ となっているので、 $p(X) \subseteq K$ は有限集合となる。したがって $(X, M(A, v))$ 上の index v は simple である。 \square

7 Summary

■ **定理 7.1.** 任意の spectral 空間 X に対して、 $X \cong \text{Spec } H_X$ となる環 H_X が存在する。

Proof. X を spectral 空間とする。

3 節でみたように、 X に付随して、 space with indeterminates $(X, \mathring{\mathcal{K}}(X))$ が得られる。

また 4 節で構成したように、体 k を一つ固定すると、 $(X, \mathring{\mathcal{K}}(X))$ に付随して、 spring (X, A_X) が得られる (命題 4.5, 4.6, 4.7)。

さらに 5 節で構成したように、このような spring 上に index v が定義でき、しかもこれは simple index となる (命題 5.5)。

こうして得られた simply indexed spring (X, A_X, v) に対して、 6.3 小節のように $V(a) \cap D(b)$ という形の hole を持たないような v -extension $M(A_X) = M(A_X, v)$ が構成できる (定理 6.6)。 6.4 小節の系 6.9 よりこの拡大において index の simplicity は保たれ、 $(X, M(A_X), v)$ も simply indexed spring となっている。

よって $H_X := M(A_X)$ と置けば、定理 6.8 により、 (X, H_X) は affine となり、 Φ_{H_X} によって同相 $X \cong \text{Spec } H_X$ が得られる。 \square

この定理の環 H_X は Hochster 環と呼ばれることがある。

なお、Hochster [Hoc69] はスキームの底空間として表される位相空間の特徴づけも与えている。

■ **定義 7.2.** 位相空間 X が locally spectral であるとは、相対位相で spectral 空間となるような開集合からなる被覆を持つときをいう。

■ **定理 7.3** ([Hoc69, Theorem 9]). 全ての locally spectral 空間は、あるスキームの底空間として実現される。

証明はよくわからなかったなので、[Hoc69] を読んで誰か教えてほしい。

III 章 構成の関手性と Hochster の定理

8 構成の関手性

II 章ではさまざまな概念を定義し、いくつかの構成を行った。各々について圏を定め、構成を関手として捉え直そう。

8.1 圏 Splndet, ISpring

$f: X \rightarrow Y$ を spectral 写像とすると、定義から写像

$$\mathring{\mathcal{K}}(Y) \rightarrow \mathring{\mathcal{K}}(X), \quad V \mapsto f^{-1}(V)$$

が well-defined に定まる。これを $\mathring{\mathcal{K}}(f)$ と書くと、関手

$$\mathring{\mathcal{K}}: \text{Spectral}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

が得られる。

定義 8.1. $(X, D, g), (Y, E, h)$ を space with indeterminates とする。 (X, D, g) から (Y, E, h) への space with indeterminates の射とは、

- spectral 写像 $f: X \rightarrow Y$
- 単射 $r: E \rightarrow D$

の組 (f, r) であって

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{r} & D \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ \mathring{\mathcal{K}}(Y) & \xrightarrow{\mathring{\mathcal{K}}(f)} & \mathring{\mathcal{K}}(X) \end{array}$$

が可換となるもののこと。

space with indeterminates とその射のなす圏を Splndet と表す。圏 Splndet は自然に忘却関手 $V: \text{Splndet} \rightarrow \text{Spectral}$ を持つ。

例. 3 節の例でも取り上げたように、spectral 空間 X に付随して space with indeterminates $(X, \mathring{\mathcal{K}}(X), \text{id})$ が自然に作れる。これを $F(X) = (X, \mathring{\mathcal{K}}(X), \text{id})$ とおき、spectral 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して $F(f) = (f, \mathring{\mathcal{K}}(f))$ を考えれば、関手

$$F: \text{Spectral} \rightarrow \text{Splndet}$$

が得られる。

定義 8.2. $(X, A) = (X, A, (A^x)_{x \in X}), (Y, B) = (Y, B, (B^y)_{y \in Y})$ を spring とする. (X, A) から (Y, B) への spring の射とは,

- spectral 写像 $f: X \rightarrow Y$
- 環準同型 $f^\#: B \rightarrow A$

の組 $(f, f^\#)$ であって

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(A) & \xrightarrow{\text{Spec}(f^\#)} & \text{Spec}(B) \\ \uparrow \Phi & & \uparrow \Phi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

が可換になるものこと. ここで Φ は 4 節で定義した埋め込みである. この図式が可換であることは, 任意の $x \in X$ と $b \in B$ に対して

$$f^\#(b)(x) = 0 \iff b(f(x)) = 0$$

が成り立つことと言い換えられる.

spring とその射のなす圏を **Spring** と表す. 圏 **Spring** は自然に忘却関手 $V: \text{Spring} \rightarrow \text{Spectral}$ を持つ.

定義 8.3. $(X, A, v), (Y, B, w)$ を indexed spring とする. (X, A, v) から (Y, B, w) への indexed spring の射とは,

- spring の射 $(f, f^\#): (X, A) \rightarrow (Y, B)$

であって, 任意の X の specialization $x \rightsquigarrow x'$ に対して

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f^\#} & B \\ \pi_x \downarrow & & \downarrow \pi_{f(x)} \\ Q(A^x) & & Q(B^{f(x)}) \\ & \swarrow v_{x \rightsquigarrow x'} & \nwarrow w_{f(x) \rightsquigarrow f(x')} \\ & \mathbb{Z} \cup \{\infty\} & \end{array}$$

が可換になるものこと. この図式が可換であることは, 任意の $b \in B$ に対して

$$v_{x \rightsquigarrow x'}(f^\#(b)(x)) = w_{f(x) \rightsquigarrow f(x')}(b(f(x)))$$

が成り立つことと言い換えられる. 命題 1.7 より連続写像は specialization を保つことに注意する.

indexed spring とその射のなす圏を **ISpring** と表す. 圏 **ISpring** は自然に忘却関手 $V: \text{ISpring} \rightarrow \text{Spectral}$ を持つ. さらに simply indexed spring のなす充満部分圏を **sISpring** と表す.

8.2 関手 $\mathbb{I}: \text{Splndet} \rightarrow \text{ISpring}$

4, 5 節では, space with indeterminates (X, E, g) に対して, それに付随する indexed spring (X, A_X, v) を構成した. これを $\mathbb{I}(X, E, g) = (X, A_X, v)$ とおく.

space with indeterminates の射 $(f, r): (X, D, g) \rightarrow (Y, E, h)$ に対して, indexed spring の射 $\mathbb{I}(f, r)$ を構成しよう. $\mathbb{I}(X, D, g) = (X, A, v)$, $\mathbb{I}(Y, E, h) = (Y, B, w)$ とおく. 体 k を一つ固定しておく. 写像 $r: E \rightarrow D$ を不定元の集合の間の写像 $T_Y \rightarrow T_X; t_e \mapsto t_{r(e)}$ と思えば, 一意的に k -代数の準同型

$$\tilde{r}: k[T_Y] \rightarrow k[T_X]$$

を誘導する. r が単射であったことから, \tilde{r} も単射となる. これを用いて, k -代数の準同型

$$R: k[T_Y]^Y \rightarrow k[T_X]^X, \quad q \mapsto \tilde{r} \circ q \circ f$$

が定まる. ここで 4 節の構成より

$$A = k[\chi_d \mid d \in D] \subseteq k[T_X]^X, \quad B = k[\chi_e \mid e \in E] \subseteq k[T_Y]^Y$$

であったことを思い出そう. $\chi_e \in B$ ($e \in E$) に対して

$$R(\chi_e) = \chi_{r(e)} \in A$$

となる.

$\therefore x \in X$ に対して, (f, r) が space with indeterminates の射であることから

$$f(x) \in U_e = h(e) \iff x \in f^{-1}(h(e)) = g(r(e)) = U_{r(e)}$$

となることに注意すると

$$\begin{aligned} R(\chi_e)(x) &= \tilde{r}(\chi_e(f(x))) \\ &= \begin{cases} \tilde{r}(t_e) = t_{r(e)} & (f(x) \in U_e \iff x \in U_{r(e)}) \\ 0 & (f(x) \notin U_e \iff x \notin U_{r(e)}) \end{cases} \\ &= \chi_{r(e)}(x) \end{aligned}$$

より $R(\chi_e) = \chi_{r(e)}$ となる.

このことから $R(B) \subseteq A$ が成り立ち, R を制限することで k -代数の準同型

$$r^\# = R|_B : B \rightarrow A$$

が得られる. このとき $r^\#$ は spring の射

$$(f, r^\#): (X, A) \rightarrow (Y, B)$$

を与える.

∴) 任意の $x \in X$ と $b \in B$ に対して, \tilde{r} の単射性より

$$\begin{aligned} r^\#(b)(x) &= \tilde{r} \circ b \circ f(x) = \tilde{r}(b(f(x))) = 0 \\ &\iff b(f(x)) = 0 \end{aligned}$$

となるから, $(f, r^\#)$ は spring の射である.

さらにこれは indexed spring の射

$$(f, r^\#): (X, A, v) \rightarrow (Y, B, w)$$

をなす.

∴) X の specialization $x \rightsquigarrow x'$ と $b \in B$ を任意に取る. \tilde{r} の構成から, $v_{x \rightsquigarrow x'}(\tilde{r}(b(f(x)))) = w_{f(x) \rightsquigarrow f(x')}(b(f(x)))$ がわかるから, $v_{x \rightsquigarrow x'}(r^\#(b)(x)) = w_{f(x) \rightsquigarrow f(x')}(b(f(x)))$ が成り立つ.

そこで $\mathbb{I}(f, r) = (f, r^\#)$ とおけば, これらの対応は関手

$$\mathbb{I}: \text{Splndet} \rightarrow \text{ISpring}$$

をなすことがわかる. 命題 5.5 より関手 \mathbb{I} の像は部分圏 $\text{slSpring} \subseteq \text{ISpring}$ に含まれ,

$$\begin{array}{ccc} \text{Splndet} & \xrightarrow{\quad \mathbb{I} \quad} & \text{ISpring} \\ & \searrow \text{dashed} & \swarrow \\ & \text{slSpring} & \end{array}$$

と分解することがわかる. この関手 $\text{Splndet} \rightarrow \text{slSpring}$ も \mathbb{I} で表す.

8.3 関手 $\mathbb{M}: \text{ISpring} \rightarrow \text{ISpring}$

6 節では, indexed spring (X, A, v) から indexed spring $(X, M(A, v), v)$ を構成した. これを $\mathbb{M}(X, A, v) = (X, M(A, v), v)$ とおく.

indexed spring の射 $(f, f^\#): (X, A, v) \rightarrow (Y, B, w)$ に対して, indexed spring の射 $\mathbb{M}(f, f^\#)$ を構成しよう. A から $M(A, v)$ へと環を拡大していく過程で, $f^\#$ も順次拡張されることを確認する.

命題 8.4 ([Hoc69, Proposition 2]). $(f, f^\#): (X, A, v) \rightarrow (Y, B, w)$ を indexed spring の射とする.

- (i) (Y, B, w) の admissible pair (b, b') に対して, $(f^\#(b), f^\#(b'))$ はまた admissible pair になる. これより $f^\#$ は環準同型

$$\phi: B[b' // b] \rightarrow A[f^\#(b') // f^\#(b)], \quad \phi(b' // b) = f^\#(b') // f^\#(b)$$

へと拡張される.

- (ii) 組 (f, ϕ) は indexed spring の射 $(X, A[f^\#(b')//f^\#(b)], v) \rightarrow (Y, B[b'//b], w)$ をなす。
 (iii) $(b', b) \in G(B, w)$ を admissible pair とし, $A \subseteq A' \subseteq \Omega_A$ を A の v -extension, $B \subseteq B[b'//b] \subseteq B' \subseteq \Omega_B$ を B の w -extension とする. spring の射 $(f, \phi'): (X, A') \rightarrow (Y, B')$ が図式

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f^\#} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B[b'//b] & & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow{\phi'} & A' \end{array}$$

を可換にすると, $f^\#(b')//f^\#(b) \in A'$ かつ $\phi'(b'//b) = f^\#(b')//f^\#(b)$ が成り立つ.

Proof. (i) admissible pair (b, b') に対して, これは $z(b) \subseteq z(b')$ かつ定理 6.3 の条件 (b) をみたすことと同値である. A の元の組 $(f^\#(b), f^\#(b'))$ について,

$$\begin{aligned} x \in z(f^\#(b)) &\iff f^\#(b)(x) = 0 \iff b(f(x)) = 0 \\ &\implies b'(f(x)) = 0 \iff x \in z(f^\#(b')) \end{aligned}$$

より $z(f^\#(b)) \subseteq z(f^\#(b'))$ が成り立つ. また, $f^\#(b')(x) \neq 0$ なる X の specialization $x \rightsquigarrow x'$ に対して, $b'(f(x)) \neq 0$ となるから (b, b') に対する条件 (b) より

$$w_{f(x) \rightsquigarrow f(x')}(b'(f(x))) \geq w_{f(x) \rightsquigarrow f(x')}(b(f(x)))$$

となり indexed spring の射の定義から, これは $v_{x \rightsquigarrow x'}(f^\#(b')(x)) \geq v_{x \rightsquigarrow x'}(f^\#(b)(x))$ を意味する. さらに

$$\begin{aligned} v_{x \rightsquigarrow x'}(f^\#(b')(x)) = v_{x \rightsquigarrow x'}(f^\#(b)(x)) &\iff w_{f(x) \rightsquigarrow f(x')}(b'(f(x))) = w_{f(x) \rightsquigarrow f(x')}(b(f(x))) \\ &\implies b(f(x')) \neq 0 \\ &\iff f^\#(b)(x') \neq 0 \end{aligned}$$

となるから, 組 $(f^\#(b), f^\#(b'))$ は定理 6.3 の条件 (b) をみたす. したがって $(f^\#(b), f^\#(b'))$ は admissible pair である.

(ii) (f, ϕ) が indexed spring の射となることを言うには, 任意の $x \in X$ と $q \in B[b'//b]$ に対して

$$\phi(q)(x) = 0 \iff q(f(x)) = 0$$

を示せばよい. $q \in B[b'//b]$ を

$$q = b_n(b'//b)^n + \cdots + b_1(b'//b) + b_0 \quad (b_0, \dots, b_n \in B)$$

と表し, $c \in B$ を

$$c = b_n b'^n + b_{n-1} b'^{n-1} b + \cdots + b_1 b' b^{n-1} + b_0 b^n$$

とおく.

- $b(f(x)) = 0$ のとき, $f^\#(b)(x) = 0$ でもあるから, $q(f(x)) = b_0(f(x))$, $\phi(q)(x) = f^\#(b_0)(x)$ となり, $(f, f^\#)$ が indexed spring の射であることより $\phi(q)(x) = 0 \Leftrightarrow q(f(x)) = 0$ が成り立つ.
- $b(f(x)) \neq 0$ のとき, $f^\#(b)(x) \neq 0$ でもあるから,

$$\begin{aligned} q(f(x)) &= b_n(f(x)) \left(\frac{b'(f(x))}{b(f(x))} \right)^n + \cdots + b_1(f(x)) \left(\frac{b'(f(x))}{b(f(x))} \right) + b_0(f(x)) \\ &= \frac{c(f(x))}{b(f(x))^n} \\ \phi(q)(x) &= f^\#(b_n)(x) \left(\frac{f^\#(b')(x)}{f^\#(b)(x)} \right)^n + \cdots + f^\#(b_1)(x) \left(\frac{f^\#(b')(x)}{f^\#(b)(x)} \right) + f^\#(b_0)(x) \\ &= \frac{f^\#(c)(x)}{f^\#(b^n)(x)} \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} \phi(q)(x) = 0 &\iff f^\#(c)(x) = 0 \\ &\iff c(f(x)) = 0 \iff q(f(x)) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ.

(iii) 各 $x \in X$ に対して, $\phi'(b'//b)(x) = (f^\#(b')//f^\#(b))(x)$ が成り立つことを示せばよい. ここで B' の元として $b' = b \cdot (b'//b)$ が成り立つことに注意する.

- $b(f(x)) = 0$ のとき, $f^\#(b)(x) = 0$ である. (f, ϕ') が spring の射であることから,

$$\phi'(b'//b)(x) = 0 \iff (b'//b)(f(x)) = 0$$

が成り立つ. よって $\phi'(b'//b)(x) = 0 = (f^\#(b')//f^\#(b))(x)$ となる.

- $b(f(x)) \neq 0$ のとき, $f^\#(b)(x) \neq 0$ である. 図式の可換性より $\phi'(b) = f^\#(b)$ であることを用いれば,

$$\begin{aligned} f^\#(b)(x) \cdot \phi'(b'//b)(x) &= \phi'(b)(x) \cdot \phi'(b'//b)(x) \\ &= \phi'(b \cdot (b'//b))(x) = \phi'(b')(x) = f^\#(b')(x) \\ \therefore \phi'(b'//b)(x) &= \frac{f^\#(b')(x)}{f^\#(b)(x)} = (f^\#(b')//f^\#(b))(x) \end{aligned}$$

となる. □

系 8.5. indexed spring の射 $(f, f^\#): (X, A, v) \rightarrow (Y, B, w)$ に対して, 図式

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f^\#} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{\phi_1} & A_1 \end{array}$$

を可換にするような準同型 ϕ_1 が一意的に存在して, (f, ϕ_1) は indexed spring の射 $(X, A_1, v) \rightarrow (Y, B_1, w)$ となる. ここで $A_1 = A[G(A, v)]$, $B_1 = B[G(B, w)]$ である.

Proof. admissible pair $(b', b) \in G(B, w)$ に対して $\phi_1(b' // b) = f^\#(b') // f^\#(b)$ とおけば, 図式を可換にする準同型 $\phi_1: B_1 \rightarrow A_1$ が得られる. (f, ϕ_1) が indexed spring の射となることは, 命題 8.4 (ii) より従う. ϕ_1 は一意であることは命題 8.4 (iii) より従う. \square

これにより, indexed spring の射 $(f, f^\#): (X, A, v) \rightarrow (Y, B, w)$ に対して, indexed spring の射 $(f, \phi_1): (X, A_1, v) \rightarrow (Y, B_1, w)$ が得られた. これを繰り返せば, 帰納的に indexed spring の射 $(f, \phi_n): (X, A_n, v) \rightarrow (Y, B_n, w)$ ($n \in \mathbb{N}$) が得られ, したがって indexed spring の射

$$(f, M(f^\#)): (X, M(A, v), v) \rightarrow (Y, M(B, w), w)$$

を誘導する. これを $\mathbb{M}(f, f^\#) = (f, M(f^\#))$ とおけば, これらの対応は関手

$$\mathbb{M}: \text{ISpring} \rightarrow \text{ISpring}$$

をなすことがわかる. 系 6.9 より関手 \mathbb{M} による sISpring の像はまた部分圏 $\text{sISpring} \subseteq \text{ISpring}$ に含まれ,

$$\begin{array}{ccc} \text{ISpring} & \xrightarrow{\mathbb{M}} & \text{ISpring} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{sISpring} & \dashrightarrow & \text{sISpring} \end{array}$$

と分解することがわかる. この関手 $\text{sISpring} \rightarrow \text{sISpring}$ も \mathbb{M} で表す.

9 Hochster の定理

Hochster の論文 [Hoc69] の主題は, 関手 $\text{Spec}: \text{Ring}^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$ が圏 Spectral のどんな部分圏上で section を持つか, ということであった. 以下では都合上関手 Spec は Spectral への関手として扱うことにする.

定義 9.1. \mathcal{C} を Spectral の部分圏とし, 包含関手を $\text{incl}: \mathcal{C} \hookrightarrow \text{Spectral}$ とする. 関手 $\text{Spec}: \text{Ring}^{\text{op}} \rightarrow \text{Spectral}$ について, $\text{Spec} \circ S \cong \text{incl}$ となる関手 $S: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ring}^{\text{op}}$ が存在するとき, Spec は \mathcal{C} 上で section を持つという.

定義 9.2. 圏 \mathcal{C} が, Spectral への関手 $U: \mathcal{C} \rightarrow \text{Spectral}$ を持つとき, 組 (\mathcal{C}, U) は Spectral 上の圏であるという.

Spectral 上の圏 $(\mathcal{C}, U), (\mathcal{D}, V)$ に対して, 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が space-preserving な関手であるとは,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \searrow U & & \swarrow V \\ & \text{Spectral} & \end{array}$$

が可換になるときをいう。

Spectral の部分圏 \mathcal{C} は、包含関手 incl によって Spectral 上の圏 $(\mathcal{C}, \text{incl})$ とみなす。また圏 Splndet , ISpring , sISpring は、それぞれの忘却関手によって Spectral 上の圏とみなす。

定理 9.3 (Hochster の定理). 部分圏 $\mathcal{C} \subseteq \text{Spectral}$ に対して, space-preserving な関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Splndet}$ が存在するとき, Spec は \mathcal{C} 上で section を持つ。特に Spec は Spectral 上で section を持つ。

Proof. 8 節で構成した関手

$$\mathbb{I}: \text{Splndet} \rightarrow \text{sISpring}, \quad \mathbb{M}: \text{sISpring} \rightarrow \text{ISpring}$$

は space-preserving な関手である。sISpring が自然にもつ反変な忘却関手を

$$\mathbb{V}: \text{sISpring} \rightarrow \text{Ring}^{\text{op}}$$

として,

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \text{Splndet} \xrightarrow{\mathbb{I}} \text{sISpring} \xrightarrow{\mathbb{M}} \text{ISpring} \xrightarrow{\mathbb{V}} \text{Ring}^{\text{op}}$$

を考える。 $\mathbb{H} = \mathbb{V} \circ \mathbb{M} \circ \mathbb{I}$ とおく。 F は space-preserving であるから, \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ に対して

$$F(X) = (X, D, g), \quad F(Y) = (Y, E, h), \quad F(f) = (f, r)$$

とかける。また $\mathbb{M} \circ \mathbb{I}(f, r) = (f, \mathbb{H}(f, r))$ であり, spring の射の定義から, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathbb{H}(X, D, g)) & \xrightarrow{\text{Spec}(\mathbb{H}(f, r))} & \text{Spec}(\mathbb{H}(Y, E, h)) \\ \uparrow \Phi & & \uparrow \Phi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

を得る。この図式の可換性は, Φ が自然変換

$$\Phi: \text{incl} \Rightarrow \text{Spec} \circ \mathbb{H} \circ F$$

を与えることを意味し, さらに系 6.9 より Φ は自然同型となるから,

$$\text{incl} \cong \text{Spec} \circ (\mathbb{H} \circ F)$$

となる。よって Spec は \mathcal{C} 上で section $\mathbb{H} \circ F$ を持つ。 \square

定理 9.4 ([Hoc69, Theorem 6], [DST19, 12.6.7]). 関手 Spec は, 次のような部分圏 $\mathcal{C} \subseteq \text{Spectral}$ 上で section を持つ。

- (i) 異なる二つの spectral 空間 $X \neq Y$ を対象とし, 恒等射と X から Y への spectral 写像のみを射に持つような圏 \mathcal{C}

- (ii) spectral 空間 X を一つ固定したとき, X の spectral subspace を対象とし, その間の包含写像のみを射とするような圏 \mathcal{C}
- (iii) spectral 空間全体を対象とし, 全射な spectral 写像を射とするような圏 \mathcal{C}

Proof. 定理 9.3 により, それぞれについて space-preserving な関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Splndet}$ が存在することを示せばよい.

(i) 射影 $\text{pr}: \mathring{\mathcal{K}}(X) \times \mathring{\mathcal{K}}(Y) \rightarrow \mathring{\mathcal{K}}(X)$ を用いて, space with indeterminates を

$$\begin{aligned} F(X) &= (X, \mathring{\mathcal{K}}(X) \times \mathring{\mathcal{K}}(Y), \text{pr}) \\ F(Y) &= (Y, \mathring{\mathcal{K}}(Y), \text{id}) \end{aligned}$$

とおく. spectral 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, 単射 $(\mathring{\mathcal{K}}(f), \text{id})$ を考えると,

$$\begin{array}{ccc} \mathring{\mathcal{K}}(X) \times \mathring{\mathcal{K}}(Y) & \xleftarrow{(\mathring{\mathcal{K}}(f), \text{id})} & \mathring{\mathcal{K}}(Y) \\ \downarrow \text{pr} & & \downarrow \text{id} \\ \mathring{\mathcal{K}}(X) & \xleftarrow{\mathring{\mathcal{K}}(f)} & \mathring{\mathcal{K}}(Y) \end{array}$$

が可換となるから, space with indeterminates の射

$$F(f) = (f, (\mathring{\mathcal{K}}(f), \text{id})) : F(X) \rightarrow F(Y)$$

が定まる. これらの対応は関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Splndet}$ をなし, F は space-preserving となる.

(ii) X の spectral subspace $Y \subseteq Z \subseteq X$ に対して, その包含写像を $i_{Y,Z}: Y \hookrightarrow Z$ を表す. spectral subspace $Y \subseteq X$ に対して, $\rho_Y = \mathring{\mathcal{K}}(i_{Y,X}): \mathring{\mathcal{K}}(X) \rightarrow \mathring{\mathcal{K}}(Y)$ とおくと命題 1.21 の証明よりこれは全射で, よって space with indeterminates

$$F(Y) = (Y, \mathring{\mathcal{K}}(X), \rho_Y)$$

が得られる. spectral subspace の間の包含写像 $i_{Y,Z}$ に対しては

$$\begin{array}{ccc} \mathring{\mathcal{K}}(X) & \xleftarrow{\text{id}} & \mathring{\mathcal{K}}(X) \\ \downarrow \rho_Y & & \downarrow \rho_Z \\ \mathring{\mathcal{K}}(Y) & \xleftarrow{\mathring{\mathcal{K}}(i_{Y,Z})} & \mathring{\mathcal{K}}(Z) \end{array}$$

が可換になることから, space with indeterminates の射

$$F(i_{Y,Z}) = (i_{Y,Z}, \text{id}): F(Y) \rightarrow F(Z)$$

が定まる. これらの対応は関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Splndet}$ をなし, F は space-preserving となる.

(iii) spectral 空間 X に対して,

$$F(X) = (X, \mathring{\mathcal{K}}(X), \text{id})$$

は space with indeterminates である. 全射な spectral 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, 全射性より $\mathring{\mathcal{K}}(f): \mathring{\mathcal{K}}(Y) \rightarrow \mathring{\mathcal{K}}(X)$ が単射であることがわかり, space with indeterminates の射

$$F(f) = (f, \mathring{\mathcal{K}}(f)): F(X) \rightarrow F(Y)$$

が得られる. これらの対応は関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Splndet}$ をなし, F は space-preserving となる. \square

注意. 関手 Spec が section を持つような部分圏 $\mathcal{C} \subseteq \text{Spectral}$ のすべてが, space-preserving な関手 F をもつわけではない ([DST19, 12.6.8]).

もちろん, Spec が section を持たないような部分圏 $\mathcal{C} \subseteq \text{Spectral}$ も存在する. 詳しくは [Hoc69, Proposition 3] や [DST19, 12.6.2] を参照のこと.

IV 章 結びに・参考文献

10 結びに

この記事は Hochster [Hoc69] の §1–§7 (§16) をまとめたもの。構成は論文の §3–§7 で行われているが、とても複雑怪奇で、Hochster 自身、“This construction is very intricate.” と述べている。[Hoc69] に加えて [DST19] と [Ted16] をよく参考にした。

Tedd [Ted16] によれば、Hochster の環の構成は、とても退屈な上続く文献でさらに掘り下げられてこなかった。有限な spectral 空間に対しては、Lewis [Lew73] が別な構成法を考案し、その手法を位相空間の fiber sum の視点から整理した Fontana [Fon80] を受けて、Ershov [Ers05] でも新たに構成法が提示された。どちらも扱いやすい構成になっていて、少なくとも Hochster の構成よりは理解しやすい。Tedd [Ted16] は、有限性の下でのこの二つの構成を比較してその類似性を指摘し、Ershov による環の構成を一般化して Hochster の構成により得られる環との関係性について考察している。

[Ted16, Summary of references, p.23] にあるように、Hochster の結果への参照は様々な文献の中でも見られるが、その構成の技法にまで言及している著者はごく少数である。Wiegand [Wie77] の例で言及があったほか、Lafon [Laf77] で Hochster の結果の完全な証明を与えていたり、Banaschewski [Ban96] では Hochster の手法を用いて構成主義的結果を証明している程度である。

spectral 空間については、初めてのまとまった書物が Dickmann-Schwartz-Tressl [DST19] によって最近出版された。§12.6 で Hochster の結果を概説している。基本事項に関しては、本稿 I 章の内容を含めて [ペ 19b] にまとめてあるので、参照いただければと思う。

参考文献

- [AtMa69] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison Wesley Publishing Company, 1969.
- [Ban96] B. Banaschewski. Radical ideals and coherent frames. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 37:349–370, 1996.
- [Bou06] N. Bourbaki. *Algèbre commutative*, Chapitre 6. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [DST19] M. Dickmann, N. Schwartz, and M. Tressl. *Spectral spaces*. Cambridge University Press, 2019.
- [Ers05] Yu. Ershov. Spectra of rings and lattices. *Siberian Math. J.*, 46:283–292, 2005.
- [Fon80] M. Fontana. Topologically defined classes of commutative rings. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 123:331–355, 1980.
- [Hoc69] M. Hochster. *Prime ideal structure in commutative rings*. Trans. Amer. Math. Soc., 142:43–60, 1969.

- [Joh82] P. T. Johnstone. *Stone spaces*, volume 3 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Reprint of the 1982 edition.
- [Laf77] J. P. Lafon. *Algèbre commutative. Langages géométrique et algébrique*, Hermann, Paris, 1977.
- [Lew73] W. J. Lewis. The spectrum of a ring as a partially ordered set. *J. Algebra.*, 25:419–434, 1973.
- [Ted16] C. F. Tedd. *Ring constructions on spectral spaces*. PhD thesis at the University of Manchester, 2016.
- [Wie77] R. Wiegand. Prime ideal structure in Noetherian rings, in *Ring theory II, Proceedings of the Second Oklahoma Conference*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 26 pp.267–279, Dekker, New York, 1977.
- [ペ 19a] ペーパー (@paper3510mm). “Stone の表現定理”, ver. 2019 年 2 月 20 日.
https://paper3510mm.github.io/pdf/stone_rep.pdf.
- [ペ 19b] ペーパー (@paper3510mm). “Spectral 空間と分配束の Stone 双対性”, ver. 2019 年 12 月 7 日. Math Advent Calender 2019 (<https://adventar.org/calendars/4297>) 7 日目の記事.
<https://paper3510mm.github.io/pdf/spectral.pdf>.