可微分多様体と局所環付き空間 *

@paper3510mm[†]

2019 年 12 月 1 日

局所環付き空間とは，環の層を備えた位相空間であって適切な条件をみたすもののことである．層とは関数空間であり，空間とその上の関数を一緒くたにして考えるという思想は，代数幾何学において大きく転換する契機となった．古典的な多様体においても，その上の可微分写像のなす空間を付随して考えることができるが，これらは自然に局所環付き空間をなす．この対応は，多様体の圏から局所環付き空間への関手を与えるが，実はこの関手は充満忠実であり，多様体は，局所環付き空間として特徴づけられることがわかる．本稿では，位相空間 X 上に可微分アトラスをもつ意味での多様体の圏 $\mathscr{M}_{at}$ と局所環付き空間の圏の部分圏としての多様体の圏 $\mathscr{M}_{Sh}$ を定義し，これらが実際に同型であることを証明する．

1 主内容

以下では，k は整数 $k \geq 0$ または ∞ を表すとする．

通常よくみかける多様体とは，ユークリッド空間と同相な開集合からなる被覆を備えた位相空間のことである．

定義 1.1. X を位相空間とする．X 上の k-可微分アトラス (k-differentiable atlas)A^k_X とは，I を添え字集合として

- X の開集合 X_i
- 整数 $n_i \geq 0$
- $\mathbb{R}^{n_i}$ の開集合 U_i
- 同相写像 $h_i \colon U_i \to X_i$

の組の族 $\{(U_i, h_i, X_i, n_i)\}_{i \in I}$ であって，

- $X = \displaystyle\bigcup_{i \in I} X_i$
- 全ての $i, j \in I$ に対し，$X_{ij} := X_i \cap X_j =: X_{ji}$ などと書くとき，制限写像 $h_i \colon U_{ij} \to X_{ij}$

---

* C95 頒布 “B.PROJECT vol.1” に寄稿した記事です

† Twitter: https://twitter.com/paper3510mm

> と $h_j\colon U_{ji}\to X_{ji}$ について，同相写像 $h_j^{-1}\circ h_i\colon U_{ij}\to U_{ji}$ は k-可微分 (k-differentiable) (ユークリッド空間の間の写像として C^k 級であるということ) である
>
> をみたすもののこと．以上のデータを $A_X^k(I,U,h,n)$，あるいは単に A_X^k とかく．

位相空間 X とその上の k-可微分アトラス A_X^k の組 (X,A_X^k) を，k-可微分アトラス付き位相空間 (topological space with a k-differentiable atlas) と呼ぶ．k-可微分アトラス付き位相空間の間の射 $\phi\colon (X,A_X^k(I,U,h,n))\to(Y,A_Y^k(J,V,g,m))$ とは，連続写像 $\phi\colon X\to Y$ であって，すべての $(i,j)\in I\times J$ に対して

$$g_j^{-1}\circ\phi\circ h_i\colon h_i^{-1}(\phi^{-1}(Y_j)\cap X_i)\to V_j$$

が k-可微分であるものをいう．

> **補題 1.2.** $\phi\colon (X,A_X^k)\to(Y,A_Y^k)$ と $\psi\colon (Y,A_Y^k)\to(Z,A_Z^k)$ を k-可微分アトラス付き位相空間の間の射とすると，$\psi\circ\phi\colon (X,A_X^k)\to(Z,A_Z^k)$ もそうである．また，全ての (X,A_X^k) に対して，$1_X\colon (X,A_X^k)\to(X,A_X^k)$ も射である．

この補題より，上で定めた k-可微分アトラス付き位相空間とその射は圏をなすことがわかる．これを k-可微分アトラス付き位相空間の圏 (category of topological spaces with a k-differentiable atlas) と呼ぶ．

> **補題 1.3.** 位相空間 X 上の二つの k-可微分アトラス $A_X^k(I,U,h,n)$ と $A_X^k(J,U,h,n)$ に対して，関係 $\sim$ を
>
> $$A_X^k(I,U,h,n)\sim A_X^k(J,U,h,n)\Leftrightarrow A_X^k(I\sqcup J,U,h,n)\text{ はまた }k\text{-可微分アトラス}$$
>
> によって定めると，これは同値関係になる．さらに，A_X^k の同値類は，包含関係により半順序をもち，唯一の極大元をもつ．この極大元も A_X^k とかく．

> **定義 1.4.** (X,A_X^k) を k-可微分アトラス付き位相空間で，A_X^k が X 上の極大アトラスとなるものとする．この X 上の極大アトラスを X 上の k-可微分構造 (k-differentiable structure) といい，位相空間とその上の k-可微分構造の組 (X,A_X^k) を k-可微分多様体 (k-differentiable manifold) という．
>
> k-可微分多様体の間の射 $\phi\colon (X,A_X^k)\to(Y,A_Y^k)$ は，k-可微分アトラス付き位相空間の圏の射とする．

ふつう，位相空間 X に Hausdorff 性と第二可算性も課して多様体と呼ぶが，ここでは特に仮定しないことにする[*1]．この定義 1.4 の意味での可微分多様体とその射のなす圏 (category of differentiable

[*1] 上の Hausdorff 性と第二可算性を仮定しない多様体を，仮定する通常の多様体と区別して，前多様体 (premanifold) と呼ぶこともある．

manifolds defined via atlases) を，$\mathscr{M}_{at}$ と表す．

定義 1.5. $(X, A^k_X(I, U, h, n))$ を k-可微分多様体とし，$U \subseteq X$ を X の開集合とする．写像 $f\colon U \to \mathbb{R}$ が k-可微分写像 (k-differentiable map) であるとは，すべての $i \in I$ で $f \circ h_i\colon h_i^{-1}(X_i \cap U) \to \mathbb{R}$ が k-可微分であるときをいう．

微分幾何学での研究の対象となるものが可微分多様体である．一方代数幾何学においても，代数閉体上の代数的集合を張り合わせた位相空間について調べられていたが，理論の発展につれて，また整数論からの要請もあり，一般の体や環上で代数幾何を展開する必要が生まれた．そこで Grothendieck は，可微分多様体に潜んでいた (局所) 環付き空間の概念を抽出し，アフィン・スペクトラムと同相な開被覆をもつ局所環付き空間として，スキームを定義した．もちろん従来の多様体も局所環付き空間として再定義できることがわかる (定理 1.11).

Grothendieck は空間概念として局所環付き空間を採用したわけだが，これは従来の多様体を含む．すなわち多様体の圏は局所環付き空間の圏に埋め込まれ，この意味で適切な一般化になっている．

定義 1.6. R を単位的可換環とする．

R-環付き空間 (R-ringed space) とは，位相空間 X と X 上の R-代数の層 $\mathcal{O}_X$ の組 $(X, \mathcal{O}_X)$ のこと．R-環付き空間の射とは，連続写像 $f\colon X \to Y$ と Y 上の R-代数の層の準同型 $\theta\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ の組 (f, θ) のこと．恒等射 $(1_X, 1_{\mathcal{O}_X})$ と合成 $(g, \eta) \circ (f, \theta) = (g \circ f, g_*\theta \circ \eta)$ によって，R-環付き空間とその射は圏をなす．これを RS_R とかく．

R-局所環付き空間 (locally R-ringed space) とは，R-環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ であって，全ての $x \in X$ に対し茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ が局所環となるもののこと．R-局所環付き空間の射とは，R-環付き空間の射 (f, θ) であって，全ての $x \in X$ に対し準同型 $\theta_x\colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ が局所準同型になる (つまり，$\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_{f(x)}$ をそれぞれ $\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{Y,f(x)}$ の極大イデアルとして，$\theta_x(\mathfrak{m}_{f(x)}) \subseteq \mathfrak{m}_x$ をみたす) もののこと．R-局所環付き空間とその射は，R-環付き空間の射として合成を考えることで圏をなす．これを LocRS_R とかく．

特に $R = \mathbb{Z}$ のとき，$\mathbb{Z}$-環付き空間，$\mathbb{Z}$-局所環付き空間を単に環付き空間，局所環付き空間と呼び，$\mathsf{RS}, \mathsf{LocRS}$ とかく．

(X, A^k_X) を k-可微分多様体とするとき，

- X の開集合 $U \subseteq X$ に対して，
$$C^k_X(U) = \{ f\colon U \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } k\text{-可微分} \}$$
に各点ごとの和・積・スカラー倍を定めることで $\mathbb{R}$-代数とする．
- X の開集合 $V \subseteq U \subseteq X$ に対して，
$$\rho^U_V\colon C^k_X(U) \to C^k_X(V)$$
を $\rho^U_V(f) = f\big|_V$ によって定め，$\mathbb{R}$-代数の準同型とする．

によって X 上の $\mathbb{R}$-代数の層 C_X^k が自然に定まる．

補題 1.7. (X, C_X^k) は $\mathbb{R}$-局所環付き空間である．

証明. 各 $x \in X$ において，茎 $C_{X,x}^k$ が局所環となることを示す．

$$C_{X,x}^k = \{\langle U, s\rangle \mid U \text{ は } x \text{ の開近傍，} s \in C_X^k(U)\}/\!\sim$$

である．$\mathbb{R}$-準同型 $\mathrm{ev}_x \colon C_{X,x}^k \to \mathbb{R}$ を $\mathrm{ev}_x(\langle U, s\rangle) = s(x)$ と定めると，これは全射で準同型定理より

$$C_{X,x}^k/\ker(\mathrm{ev}_x) \cong \mathbb{R}$$

となるから，$\mathfrak{m}_x := \ker(\mathrm{ev}_x)$ は極大イデアル．$\langle U, s\rangle \in C_{X,x}^k \setminus \mathfrak{m}_x$ をとるとき，$s(x) \neq 0$ であり s は連続写像であることから，ある開集合 $x \in V \subseteq U$ で V 上で $s \neq 0$ なるものがとれる．すると $\langle V, s|_V\rangle = \langle U, s\rangle$ は，逆元 $\langle V, \frac{1}{s|_V}\rangle$ をもち，$C_{X,x}^k$ の単元．したがって $(C_{X,x}^k, \mathfrak{m}_x)$ は局所環である． □

k-可微分多様体 (X, A_X^k) に対して定まるこの $\mathbb{R}$-局所環付き空間を，$E(X, A_X^k) = (X, C_X^k)$ とおく．
また k-可微分多様体の射 $f \colon (X, A_X^k) \to (Y, A_Y^k)$ に対して，層の準同型 $f^\# \colon C_Y^k \to f_* C_X^k$ を

$$f_V^\# \colon C_Y^k(V) \to C_X^k(f^{-1}(V)), \quad s \mapsto s \circ f$$

によって定めるとき，明らかに誘導される茎の間の射 $f_x^\# \colon C_{Y,f(x)}^k \to C_{X,x}^k$ は $f_x^\#(\mathfrak{m}_{f(x)}) \subseteq \mathfrak{m}_x$ をみたし，局所準同型である．こうして $\mathbb{R}$-局所環付き空間の射 $(f, f^\#) \colon (X, C_X^k) \to (Y, C_Y^k)$ が得られる．これを $E(f) = (f, f^\#)$ とおく．

するとこれらの対応は，関手

$$E \colon \mathscr{M}_{at} \to \mathsf{LocRS}_{\mathbb{R}}$$

をなすことわかる．

可微分多様体に対して，その射は局所環付き空間を誘導するが，逆に可微分多様体の間の局所環付き空間の射を与えたとき，その底空間の連続写像は自然に可微分性を持つことがわかる．

定理 1.8. k-可微分多様体 $(X, A_X^k(I, U, h, n))$ と $(Y, A_Y^k(J, V, g, m))$ から定まる $\mathbb{R}$-局所環付き空間を，それぞれ $(X, C_X^k) = E(X, A_X^k)$，$(Y, C_Y^k) = E(Y, A_Y^k)$ とおく．$(f, \theta) \colon (X, C_X^k) \to (Y, C_Y^k)$ を $\mathbb{R}$-局所環付き空間の射とするとき，連続写像 f は k-可微分で，かつ $\theta = f^\#$ が成り立つ．

証明. 任意の開集合 $V \subseteq Y$ に対して，点 $x \in f^{-1}(V)$ をとるとき θ_x が局所準同型ゆえ図式の $\overline{\theta_x}$ を

誘導することに注意すると，次が可換である．

$$
\begin{array}{ccccccc}
s & \in & C^k_Y(V) & \xrightarrow{\theta_V} & C^k_X(f^{-1}(V)) & \ni & \theta_V(s) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
s_{f(x)} & & C^k_{Y,f(x)} & \xrightarrow{\theta_x} & C^k_{X,x} & & \theta_V(s)_x \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\overline{s_{f(x)}} & & C^k_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)} & \xrightarrow{\overline{\theta_x}} & C^k_{X,x}/\mathfrak{m}_x & & \overline{\theta_V(s)_x} \\
\downarrow & & \downarrow \cong & \swarrow \cong & & & \downarrow \\
s(f(x)) & & \mathbb{R} & & & & \theta_V(s)(x)
\end{array}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
&\forall s \in C^k_X(V), \quad \forall x \in f^{-1}(V), \quad s(f(x)) = \theta_V(s)(x) \\
&\forall s \in C^k_X(V), \quad \theta_V(s) = s \circ f = f^\#_V(s) \\
&\qquad \therefore \theta_V = f^\#_V
\end{aligned}
$$

となる．よって $\theta = f^\#$ となる．さらに，任意の全ての $i \in I$ と $j \in J$ について，$\pi_r \colon V_j \to \mathbb{R}$ を r 成分の射影 $(1 \leq r \leq m_j)$ とすれば，$\pi_r \circ g_j^{-1} \in C^k_Y(Y_j)$ であり，$f^\#_{Y_j}(\pi_r \circ g_j^{-1}) = \pi_r \circ g_j^{-1} \circ f \in f_* C^k_X(Y_j) = C^k_X(f^{-1}(Y_j))$ となる．C^k_X の定義から，これは $\pi_r \circ g_j^{-1} \circ f \circ h_i \colon h_i^{-1}(X_i \cap f^{-1}(Y_j)) \to \mathbb{R}$ が k-可微分であることを意味し，よって $g_j^{-1} \circ f \circ h_i$ は k-可微分である．したがって連続写像 $f \colon X \to Y$ は k-可微分写像である． □

> **系 1.9.** 関手 $E \colon \mathscr{M}_{at} \to \mathsf{LocRS}_{\mathbb{R}}$ は充満忠実である．したがって可微分多様体の圏は局所環付き空間の圏へ埋め込まれる．

証明. 定理 1.8 は E が充満であることを示す．忠実であることは明らか． □

埋め込み E の存在から，可微分多様体の圏は局所環付き空間の圏の充満部分圏として実現できることがわかる．つまり，可微分多様体を環付き空間として定義することができる．

> **定義 1.10.** k-可微分多様体 (k-differentiable manifold) とは，$\mathbb{R}$-局所環付き空間 (M, C^k_M) であって，各点 $p \in M$ に対して M の開集合 $M_p \subseteq M$ と整数 $n_p \geq 0$ と $\mathbb{R}^{n_p}$ の開集合 $U_p \subseteq \mathbb{R}^{n_p}$，および $\mathbb{R}$-局所環付き空間の同型 $(M_p, C^k_M|_{M_p}) \cong (U_p, C^k_{U_p})$ が存在するもののこと．ここで $C^k_{U_p}$ は U_p 上の $\mathbb{R}$ 値関数のなす層で，これは多様体概念に依らず定義されることに注意．
>
> k-可微分多様体の射 (morphism of k-differentiable manifolds)$(f, f^*) \colon (M, C^k_M) \to (M', C^k_{M'})$ とは，$\mathbb{R}$-局所環付き空間としての射のこと．
>
> この意味での k-可微分多様体とその射のなす圏 (category of k-differentiable manifolds defined via sheaves) を $\mathscr{M}_{Sh}$ とかく．これは $\mathsf{LocRS}_{\mathbb{R}}$ の充満部分圏である．

定理 1.11. 関手 E は，全単射

$$E\colon \mathrm{Ob}(\mathscr{M}_{at}) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{M}_{Sh})$$

を誘導する．特に，圏として $\mathscr{M}_{at} \cong \mathscr{M}_{Sh}$．

証明. 関手 E は台となる位相空間を変えないから，E の単射性を示すには $\mathscr{M}_{at}$ の対象 $(X, A^k_X(I, U, h, n))$ と $(X, A^k_X(J, U, h, n))$ だけ考えてよい．$E(X, A^k_X(I, U, h, n)) = E(X, A^k_X(J, U, h, n))$ とすると，E の充満忠実性から，$1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}_{at}}((X, A^k_X(I, U, h, n)), (X, A^k_X(J, U, h, n)))$ であるが，$A^k_X(I \sqcup J, U, h, n)$ がアトラスであることになり，アトラスの極大性からこれは $A^k_X(I, U, h, n))$ および $A^k_X(J, U, h, n)$ に等しい．よって単射がわかった．

$\mathscr{M}_{Sh}$ の対象 (M, C^k_M) をとる．すると定義から，各点 $p \in M$ に対して，M の開集合 M_p と整数 $n_p \geq 0$ と $\mathbb{R}^{n_p}$ の開集合 U_p と $\mathbb{R}$-局所環付き空間の同型 $(h_p, \theta_p)\colon (U_p, C^k_{U_p}) \cong (M_p, C^k_M|_{M_p})$ が存在．特に $h_p\colon U_p \to M_p$ は位相同型である．これらの組の族 $\{(U_p, h_p, M_p, n_p)\}_{p \in M}$ は，M 上のアトラスを与えることがわかる．このアトラスを含む極大アトラス A^k_M をとれば，$E(M, A^k_M) = (M, C^k_M)$ となることもわかる． □

2 あとがき

関手 E が埋め込みとなる証明の大部分は，定理 1.8 にある．多様体の間の局所環付き空間の射 (f, θ) を与えると，位相空間の間の連続写像 f は自動的に k-可微分性をもつことになる．一見非自明に思えるが，層が空間の構造の情報をもつようなものだと学べば，明らかに思えるだろう．

前半は [1] に依ったが，この pdf は環付き空間としての多様体の定義があやしい．局所環付き空間としての多様体論は例えば [4] で展開されているらしい (ちゃんと読んでない)．後半は [4] の 4 章に依った．[3] はこの本の出版前に書かれたノートである．

参考文献

[1] *Locally ringed spaces and manifolds*. 2011.
http://www.math.leidenuniv.nl/~edix/teaching/2010-2011/tag/sunil1.pdf

[2] *Differentiable manifolds as locally ringed spaces* - Math StacksExchange, asked in 2012.
https://math.stackexchange.com/questions/225528/differentiable-manifolds-as-locally-ringed-spaces

[3] Torsten Wedhorn. *Manifolds, sheaves, and cohomology*.
https://www2.math.uni-paderborn.de/fileadmin/Mathematik/People/wedhorn/Lehre/SkriptMannigfaltigkeiten.pdf

[4] Torsten Wedhorn. *Manifolds, Sheaves, and Cohomology*. Springer Spektrum, 2016.