

モデル圏の理論

@paper3510mm*

2023年1月27日

概要

Quillen によるモデル圏の理論を解説する.

目次

0	はじめに	3
1	関手的分解とリフト性質	4
1.1	関手的分解	4
1.2	射のリフト性質	5
2	モデル圏論の基礎	12
2.1	モデル圏	12
2.2	射のホモトピー	15
2.2.1	Cylinder 対象と左ホモトピー	15
2.2.2	Path 対象と右ホモトピー	21
2.2.3	ホモトピー	23
2.3	モデル圏のホモトピー圏	25
2.3.1	ホモトピー圏	25
2.3.2	モデル圏の局所化	30
2.3.3	関手的分解を持つ場合	31
2.4	導来関手	33
2.5	Quillen 随伴と Quillen 同値	37
3	Cofibrantly generated なモデル圏	45
3.1	Weakly saturated class	45
3.2	The small object argument	47

* <https://paper3510mm.github.io/notes>.

3.3	Cofibrantly generated model category	50
3.4	Combinatorial model category	55
4	モデル圏再考	56
4.1	モデル圏構造再考	56
4.2	モデル圏構造の一意性	58
5	モデル圏の例	61

0 はじめに

モデル圏とは、ホモトピー論を抽象的に行うための圏の枠組みである。モデル圏は、位相空間のホモトピー論において用いられていた fibration, cofibration, weak equivalence を公理化する形で、Quillen [Qui67] によって初めて導入された。現在では、Quillen [Qui67] によるオリジナルのものよりも洗練された定義が採用され使われている。

導入された動機から明らかのように、位相空間の圏にモデル圏の構造が入る。他のモデル圏の具体例としては、単体的集合の圏や加群の複体の圏などがある。圏に入るモデル圏の構造は一般に一意ではなく、考えたいホモトピー論に合わせて扱うモデル圏構造を設定する必要がある。

本稿では、Quillen によるモデル圏の理論を解説する。圏論の基本的な知識は仮定する。

1 章では、関手的分解や射のリフト性質について、基本事項を確認する。

2 章では、モデル圏論の基礎を一通り解説する。モデル圏が何たるか、どのような理論なのかを知りたいければ、この章まで読めばよいと思う。

3 章では、モデル圏の中でも扱いやすい cofibrantly generated なモデル圏を扱う。実用上で現れるモデル圏の多くは cofibrantly generated である。

4 章では、弱分解系を用いたモデル圏の定義の言い換えを紹介する。

5 章では、モデル圏の例を紹介する。

入門的な文献として、Dwyer-Spalinski [DS95] や Goerss-Schemmerhorn [GS07] はモデル圏の知識がコンパクトにまとめられていて、わかりやすい。よりしっかりと学ぶには、Hovey [Hov99] や Hirschhorn [Hir03, Part 2] や May-Ponto [MP12, Part 4] や Lurie [Lur09, A.2, A.3] などがある。最近出版された Balchin [Bal21] では、多くのモデル圏の例が紹介されている。

1 関手的分解とリフト性質

圏はすべて locally small であるとする. 同型射のクラスを Iso と表す.

1.1 関手的分解

定義 1.1. 圏 \mathcal{C} の射の圏 $\text{Arr}(\mathcal{C})$ とは,

- $\text{Arr}(\mathcal{C})$ の対象は, \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow X'$ である
- $\text{Arr}(\mathcal{C})$ の対象 $(f: X \rightarrow X')$ から $(g: Y \rightarrow Y')$ への射とは, \mathcal{C} の射 $k: X \rightarrow Y$ と $k': X' \rightarrow Y'$ の組 (k, k') であって

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{k} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{k'} & Y' \end{array}$$

を可換にするものである

となるような圏のこと.

射の圏 $\text{Arr}(\mathcal{C})$ は, ドメインを取る関手 $\text{dom}: \text{Arr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ とコドメインを取る関手 $\text{cod}: \text{Arr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ を自然に持つ. すなわち対象 $(f: X \rightarrow X') \in \text{Arr}(\mathcal{C})$ に対し $\text{dom } f = X$, $\text{cod } f = X'$ とし, $(f: X \rightarrow X')$ から $(g: Y \rightarrow Y')$ への射 $(k, k'): f \rightarrow g$ に対し $\text{dom}(k, k') = k$, $\text{cod}(k, k') = k'$ とする対応は, 関手 dom, cod を定める.

定義 1.2. \mathcal{C} を圏とする. 関手 $\alpha, \beta: \text{Arr}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Arr}(\mathcal{C})$ の組 (α, β) が関手的分解 (functorial factorization) であるとは,

- $\text{dom} = \text{dom} \circ \alpha$, $\text{cod} \circ \alpha = \text{dom} \circ \beta$, $\text{cod} \circ \beta = \text{cod}$
- 任意の射 $(f: X \rightarrow X') \in \text{Arr}(\mathcal{C})$ に対して $f = \beta(f) \circ \alpha(f)$

が成り立つときをいう.

注意 1.3. つまり関手的分解 (α, β) があると, 射 $f: X \rightarrow X'$ について

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \alpha(f) \searrow & & \nearrow \beta(f) \\ & \text{cod } \alpha(f) = \text{dom } \beta(f) & \end{array}$$

という分解があり，可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ k \downarrow & & \downarrow k' \\ Y & \xrightarrow{g} & Y' \end{array}$$

に対して

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\alpha(f)} & \text{cod } \alpha(f) = \text{dom } \beta(f) & \xrightarrow{\beta(f)} & X' \\ \downarrow k & & \downarrow \text{cod } \alpha(k, k') = \text{dom } \beta(k, k') & & \downarrow k' \\ Y & \xrightarrow{\alpha(g)} & \text{cod } \alpha(g) = \text{dom } \beta(g) & \xrightarrow{\beta(g)} & Y' \end{array}$$

なる可換図式が得られる．なお [Hov99] での関手的分解の定義では，条件 (ii) しか書かれていないが，これでは cofibrant replacement 関手を定義するときに不十分であり，[Hov15] で訂正がなされている．

1.2 射のリフト性質

定義 1.4. 圏 \mathcal{C} の射 $i: A \rightarrow B$, $p: X \rightarrow Y$ について， i が p に関して左リフト性を持つ (*have the left lifting property with respect to p*)，ないし p が i に関して右リフト性を持つ (*have the right lifting property with respect to i*) とは，任意の外側の可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

に対して $f = h \circ i$, $g = p \circ h$ となる射 $h: B \rightarrow X$ が存在するときをいう．この h をリフト (*lift*) と呼ぶ． i が p に関して左リフト性を持つことを，

$$i \square p$$

という記号で表すことにする．

より一般に，射のクラス $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq \text{mor}(\mathcal{C})$ に対して， \mathcal{M} が \mathcal{N} に関して左リフト性を持つ，ないし \mathcal{N} が \mathcal{M} に関して右リフト性を持つとは，任意の $i \in \mathcal{M}$ と $p \in \mathcal{N}$ に対して $i \square p$ が成り立つときをいう．このことを記号

$$\mathcal{M} \square \mathcal{N}$$

で表す．

圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{M} に対して, \mathcal{M} に関して左リフト性を持つ射の集まりを $\text{LLP}(\mathcal{M})$, \mathcal{M} に関して右リフト性を持つ射の集まりを $\text{RLP}(\mathcal{M})$ と定める. すなわち

$$\begin{aligned}\text{LLP}(\mathcal{M}) &:= \{f \in \text{mor}(\mathcal{C}) \mid f \text{ は } \mathcal{M} \text{ に関して左リフト性を持つ}\} = \{f \in \text{mor}(\mathcal{C}) \mid f \boxtimes \mathcal{M}\}, \\ \text{RLP}(\mathcal{M}) &:= \{f \in \text{mor}(\mathcal{C}) \mid f \text{ は } \mathcal{M} \text{ に関して右リフト性を持つ}\} = \{f \in \text{mor}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{M} \boxtimes f\}\end{aligned}$$

と定める.

命題 1.5. 圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{M}, \mathcal{N} を考える. このとき次が成り立つ.

- (i) $\mathcal{M} \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(\mathcal{M}))$, $\mathcal{M} \subseteq \text{RLP}(\text{LLP}(\mathcal{M}))$.
- (ii) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ のとき, $\text{RLP}(\mathcal{M}) \supseteq \text{RLP}(\mathcal{N})$, $\text{LLP}(\mathcal{M}) \supseteq \text{LLP}(\mathcal{N})$.
- (iii) $\text{RLP}(\mathcal{M}) = \text{RLP}(\text{LLP}(\text{RLP}(\mathcal{M})))$, $\text{LLP}(\mathcal{M}) = \text{LLP}(\text{RLP}(\text{LLP}(\mathcal{M})))$.

Proof. (i), (ii): 定義より明らか.

(iii): (i) より $\mathcal{M} \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(\mathcal{M}))$ であるから, (ii) より $\text{RLP}(\mathcal{M}) \supseteq \text{RLP}(\text{LLP}(\text{RLP}(\mathcal{M})))$ である. 一方 $\text{RLP}(\mathcal{M})$ に対して (i) より $\text{RLP}(\mathcal{M}) \subseteq \text{RLP}(\text{LLP}(\text{RLP}(\mathcal{M})))$ である. よって $\text{RLP}(\mathcal{M}) = \text{RLP}(\text{LLP}(\text{RLP}(\mathcal{M})))$ がわかる. \square

補題 1.6. 圏 \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ に対して,

$$f \boxtimes f \iff f \text{ は同型射.}$$

Proof. (\Rightarrow): $f \boxtimes f$ より, 特に可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \end{array}$$

に対して, $g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ となるようなリフト $g: Y \rightarrow X$ が存在する. これは g が f の逆射であることを意味し, よって f は同型射である.

(\Leftarrow): f は同型射であるとする. 任意の可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

に対して, $h = u \circ f^{-1}$ と置くと

$$s \circ f = u, \quad f \circ s = f \circ u \circ f^{-1} = v \circ f \circ f^{-1} = v$$

が成り立ち, h がリフトであることがわかる. よって $f \boxtimes f$ が成り立つ. \square

補題 1.6 の証明から明らかのように、同型射は任意の射に関して左リフト性と右リフト性を持つ。

系 1.7. 圏 \mathcal{C} において、 $\text{Iso} = \text{LLP}(\text{mor}(\mathcal{C})) = \text{RLP}(\text{mor}(\mathcal{C}))$ が成り立つ。

Proof. $\text{Iso} \subseteq \text{LLP}(\text{mor}(\mathcal{C}))$ であることは明らか。 $f \in \text{LLP}(\text{mor}(\mathcal{C}))$ を取ると $f \boxtimes f$ が成り立つことになるから、補題 1.6 より $f \in \text{Iso}$ がわかる。 \square

定義 1.8. 圏 \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow X'$, $g: Y \rightarrow Y'$ について、 f が g の **レトラクト** (retract) であるとは、 $\text{Arr}(\mathcal{C})$ の対象として f が g の retract であるときをいう。すなわち、 \mathcal{C} の射 $i: X \rightarrow Y$, $i': X' \rightarrow Y'$, $r: Y \rightarrow X$, $r': Y' \rightarrow X'$ が存在して

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_X & & \\
 & \xrightarrow{i} & & \xrightarrow{r} & \\
 X & & Y & & X \\
 f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{r'} & X' \\
 & & \text{id}_{X'} & &
 \end{array}$$

が可換図式になるときをいう。

補題 1.9. 圏 \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow X'$, $g: Y \rightarrow Y'$ について f が g の retract であるとき、 g が同型射ならば f も同型射である。すなわち同型射のクラス Iso は retract で閉じる。

Proof. f は g の射であるから、可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{r} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{r'} & X'
 \end{array}$$

であって $r \circ i = \text{id}_X$, $r' \circ i' = \text{id}_{X'}$ となるものが存在する。このとき $k = r \circ g^{-1} \circ i'$ と置けば

$$\begin{aligned}
 f \circ k &= f \circ r \circ g^{-1} \circ i' = r' \circ g \circ g^{-1} \circ i' = r' \circ i' = \text{id}_{X'} \\
 k \circ f &= r \circ g^{-1} \circ i' \circ f = r \circ g^{-1} \circ g \circ i = r \circ i = \text{id}_X
 \end{aligned}$$

となるから、 f も同型射である。 \square

補題 1.10 (Retract Argument). 射の分解 $f = p \circ i$ について、 f が p に関して左リフト性を持つとき、 f は i の retract である。双対的に、 f が i に関して右リフト性を持つとき、 f は p の retract である。

Proof. $f = p \circ i: A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ とする. f が p に関して左リフト性を持つとき, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \end{array}$$

について, $i = r \circ f$ かつ $\text{id}_C = p \circ r$ となる $r: C \rightarrow B$ が存在する. このとき

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_A & & \\ & \xrightarrow{\text{id}} & A & \xrightarrow{\text{id}} & A \\ f \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{r} & B & \xrightarrow{p} & C \\ & & \text{id}_C & & \end{array}$$

が可換になるから, f は i の retract である. 同様に, f が i に関して右リフト性を持つとき f は p の retract になる. \square

射のクラス \mathcal{M} に関してリフト性質を持つ射のクラス $\text{LLP}(\mathcal{M}), \text{RLP}(\mathcal{M})$ について, いくつか成り立つことを確認する. より詳しくは 3.1 節で議論する.

命題 1.11. 圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{M} に対して, $\text{LLP}(\mathcal{M}), \text{RLP}(\mathcal{M})$ は合成で閉じる.

Proof. $\text{LLP}(\mathcal{M})$ が合成で閉じることだけ示す. $\text{RLP}(\mathcal{M})$ についても同様である. \mathcal{M} に関して左リフト性を持つ $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ に対して, $g \circ f$ が任意の \mathcal{M} の射 $p: X \rightarrow Y$ に関して左リフト性を持つことを確認すればよい. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k} & X \\ f \downarrow & (*) & \downarrow p \\ B & & Y \\ g \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

を考える. f は $p \in \mathcal{M}$ に関して左リフト性を持つから, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k} & X \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & C \xrightarrow{k'} Y \end{array}$$

に対してリフト $k'': B \rightarrow X$ が存在する. さらに g も $p \in \mathcal{M}$ に関して左リフト性を持つから, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{k''} & X \\ g \downarrow & & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

に対してリフト $h: C \rightarrow X$ が存在する. このとき h が可換図式 (*) のリフトとなり, $g \circ f$ は p に関して左リフト性を持つ. よって $\text{LLP}(\mathcal{M})$ は合成で閉じる. \square

命題 1.12. 余積を持つ圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{M} に対して, $\text{LLP}(\mathcal{M})$ は余積で閉じる. 同様に積を持つ圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{M} に対して, $\text{RLP}(\mathcal{M})$ は積で閉じる.

Proof. 余積を持つ圏 \mathcal{C} において $\text{LLP}(\mathcal{M})$ が余積で閉じることを示す. $\text{RLP}(\mathcal{M})$ の場合も同様である. $f_i: A_i \rightarrow B_i$ を \mathcal{M} に関して左リフト性を持つ射とすると, $\coprod_i f_i: \coprod_i A_i \rightarrow \coprod_i B_i$ が任意の \mathcal{M} の射 $p: X \rightarrow Y$ に関して左リフト性を持つことを確認すればよい. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \coprod_i A_i & \xrightarrow{k} & X \\ \coprod_i f_i \downarrow & (*) & \downarrow p \\ \coprod_i B_i & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

を考える. 余積の標準的な射を in_i で表すとき, 各 i について f_i は $p \in \mathcal{M}$ に関して左リフト性を持つから, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \xrightarrow{\text{in}_i} & \coprod_i A_i & \xrightarrow{k} & X \\ f_i \downarrow & & \coprod_i f_i \downarrow & & \downarrow p \\ B_i & \xrightarrow{\text{in}_i} & \coprod_i B_i & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

に対してリフト $h_i: B_i \rightarrow X$ が存在する. さらに余積の普遍性により

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow h_i & \uparrow h \\ B_i & \xrightarrow{\text{in}_i} & \coprod_i B_i \end{array}$$

となる射 $h: \coprod_i B_i \rightarrow X$ が一意に存在する. このとき

$$\begin{aligned} p \circ h \circ \text{in}_i &= p \circ h_i = k' \circ \text{in}_i, \\ h \circ \coprod_i f_i \circ \text{in}_i &= h \circ \text{in}_i \circ f_i = h_i \circ f_i = k \circ \text{in}_i \end{aligned}$$

であるから余積の普遍性より $p \circ h = k'$, $h \circ \coprod_i f_i = k$ が成り立ち, h が可換図式 (*) のリフトとなる. よって $\coprod_i f_i$ は \mathcal{M} に関して左リフト性を持ち, $\text{LLP}(\mathcal{M})$ は余積で閉じる. \square

命題 1.13. pushout を持つ圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{M} に対して, $\text{LLP}(\mathcal{M})$ は pushout で閉じる. 同様に pullback を持つ \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{M} に対して, $\text{RLP}(\mathcal{M})$ は pullback で閉じる.

Proof. pushout を持つ圏 \mathcal{C} において $\text{LLP}(\mathcal{M})$ が pushout で閉じることを示す. $\text{RLP}(\mathcal{M})$ の場合も同様である. $f: A \rightarrow B$ を \mathcal{M} に関して左リフト性を持つ射とし,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s} & C \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{t} & D \end{array} \quad \lrcorner$$

を pushout 図式とする. このとき g が任意の \mathcal{M} の射 $p: X \rightarrow Y$ に関して左リフト性を持つことを確認すればよい. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{k} & X \\ g \downarrow & (*) & \downarrow p \\ D & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

を考える. f は $p \in \mathcal{M}$ に関して左リフト性を持つから, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{s} & C & \xrightarrow{k} & X \\ f \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{t} & D & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

に対してリフト $k'': B \rightarrow X$ が存在する. さらに pushout の普遍性により

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s} & C \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{t} & D \end{array} \begin{array}{c} \searrow k \\ \dashrightarrow h \\ \searrow k'' \end{array} \begin{array}{c} X \\ \\ X \end{array}$$

となる射 $h: D \rightarrow X$ が一意的存在する. このとき

$$p \circ h \circ t = p \circ k'' = k' \circ t, \quad p \circ h \circ g = p \circ k = k' \circ g$$

であるから pushout の普遍性より $p \circ h = k'$ が成り立ち, h が可換図式 $(*)$ のリフトとなる. よって g は \mathcal{M} に関して左リフト性を持ち, $\text{LLP}(\mathcal{M})$ は pushout で閉じる. \square

命題 1.14. 圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{M} に対して, $\text{LLP}(\mathcal{M}), \text{RLP}(\mathcal{M})$ は retract で閉じる.

Proof. $\text{LLP}(\mathcal{M})$ が retract で閉じることを示す. $\text{RLP}(\mathcal{M})$ についても同様である. \mathcal{M} に関して左リフト性を持つ $g: B \rightarrow B'$ に対して, $f: A \rightarrow A'$ が g の retract である, つまり可換図式

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_A & & \\ & \xrightarrow{i} & & \xrightarrow{r} & \\ A & & B & & A \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ & \xrightarrow{i'} & & \xrightarrow{r'} & \\ A' & & B' & & A' \\ & & \text{id}_{A'} & & \end{array}$$

が存在するとする. このとき f が任意の \mathcal{M} の射 $p: X \rightarrow Y$ に関して左リフト性を持つことを確認すればよい. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k} & X \\ f \downarrow & (*) & \downarrow p \\ A' & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

を考える. g は $p \in \mathcal{M}$ に関して左リフト性を持つから, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{r} & A & \xrightarrow{k} & X \\ g \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{r'} & A' & \xrightarrow{k'} & Y \end{array}$$

に対してリフト $h: B' \rightarrow X$ が存在する. このとき射 $h \circ i': A' \rightarrow X$ について

$$(h \circ i') \circ f = h \circ g \circ i = k \circ r \circ i = k, \quad p \circ (h \circ i') = k' \circ r' \circ i' = k'$$

が成り立ち, $h \circ i'$ が可換図式 (*) のリフトとなる. よって f は p に関して左リフト性を持ち, $\text{LLP}(\mathcal{M})$ は retract で閉じる. □

2 モデル圏論の基礎

モデル圏の基礎を解説する。[DS95] と [Hov99, Ch. 1] を参考にした。

2.1 モデル圏

定義 2.1. 圏 \mathcal{C} 上のモデル圏構造 (*model category structure*) とは、

三つの射のクラス \mathcal{W} , Cof , Fib の組 $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib})$

であって

- (MC1) (2-out-of-3) \mathcal{C} の射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ について、 f, g, gf のうち二つが弱同値であるとき、もう一つも弱同値である
- (MC2) (Retracts) $\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib}$ は retract で閉じる。すなわち \mathcal{C} の射 f, g について f が g の retract であるとき、 $g \in \mathcal{W}/\text{Cof}/\text{Fib}$ ならば $f \in \mathcal{W}/\text{Cof}/\text{Fib}$ である
- (MC3) (Liftings) Cof は $\text{Fib} \cap \mathcal{W}$ に関して左リフト性を持ち、 $\text{Cof} \cap \mathcal{W}$ は Fib に関して左リフト性を持つ
- (MC4) (Factorization) \mathcal{C} の任意の射 f に対して、 $i \in \text{Cof}$ と $p \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$ による分解 $f = p \circ i$ および、 $i \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ と $p \in \text{Fib}$ による分解 $f = p \circ i$ が存在する

をみたすときをいう。

特に (MC1) より \mathcal{W} は合成で閉じる。系 2.11 と系 2.13 において、

\mathcal{W} と Cof と Fib が同型射を含み合成で閉じる

ことも確認する。

注意 2.2. 圏 \mathcal{C} 上のモデル圏構造 $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib})$ について、

- \mathcal{W} に属する射を弱同値 (*weak equivalence*) と呼び、記号 $\xrightarrow{\sim}$ で表す。
- Cof に属する射を *cofibration* と呼び、記号 \hookrightarrow で表す。
- Fib に属する射を *fibration* と呼び、記号 \twoheadrightarrow で表す。
- $\text{Cof} \cap \mathcal{W}$ に属する射を *acyclic cofibration* (または *trivial cofibration*) と呼び、記号 $\xrightarrow{\sim} \hookrightarrow$ で表す。
- $\text{Fib} \cap \mathcal{W}$ に属する射を *acyclic fibration* (または *trivial fibration*) と呼び、記号 $\twoheadrightarrow \xrightarrow{\sim}$ で表す。

定義 2.3. 圏 \mathcal{C} 上の関手的分解を持つモデル圏構造とは,

- \mathcal{C} 上のモデル圏構造 $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib})$
- 関手的分解 $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$

の組であって

(MC4') (Functorial Factorization) \mathcal{C} の任意の射 f に対して, $\alpha(f) \in \text{Cof}$ かつ $\beta(f) \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$ および, $\alpha'(f) \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ かつ $\beta'(f) \in \text{Fib}$ となる

をみたすときをいう.

定義 2.4. モデル圏 (*model category*) とは, モデル圏構造を備えた有限完備かつ有限余完備な圏のことをいう. モデル圏のモデル圏構造が関手的分解を持つとき, そのモデル圏は関手的分解を持つという.

この意味でのモデル圏は本質的に Quillen によって導入をされたものであり, Quillen model category と呼ぶこともある.

- 注意 2.5.** (i) モデル圏構造には, はじめから関手的分解を持つことを仮定することも多い. 本稿では一応分けて定義した.
- (ii) またモデル圏には, はじめから完備性と余完備性を仮定することも多い. モデル圏の基礎を展開するためには完備性および余完備性までは必要ではないため, 本稿では有限完備性・有限余完備性だけを仮定する.

モデル圏 \mathcal{C} は有限余完備かつ有限完備であるので, 特に空図式の余極限・極限として, 始対象 (*initial object*) \emptyset と終対象 (*terminal object*) $*$ を持つ.

定義 2.6. \mathcal{C} をモデル圏とする. 対象 $X \in \mathcal{C}$ について, X が *cofibrant* であるとは, 始対象からの一意的な射 $\emptyset \rightarrow X$ が cofibration であるときをいう. また X が *fibrant* であるとは, 終対象への一意的な射 $X \rightarrow *$ が fibration であるときをいう.

例 2.7. 有限完備かつ有限余完備な圏 \mathcal{C} に対して

$$\mathcal{W} = \text{Iso}(\mathcal{C}), \quad \text{Cof} = \text{Fib} = \text{mor}(\mathcal{C})$$

とすると, これは \mathcal{C} 上のモデル圏構造を定める. さらにこれは関手的分解も持つ. これを**自明なモデル圏構造** (*trivial model structure*) と呼ぶ.

例 2.8. \mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏とする. 積圏 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ において, 射 $(f, g) \in \text{mor}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ が弱同値/cofibration/fibration であることを, f, g がそれぞれ \mathcal{C}, \mathcal{D} の弱同値/cofibration/fibration であることによって定義すると, これは $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 上のモデル圏構造を定める. これを**積モデル圏**

構造 (*product model structure*) と呼ぶ.

同様にモデル圏の族 $\{\mathcal{C}_j\}_{j \in J}$ に対して積圏 $\prod_j \mathcal{C}_j$ 上にモデル圏構造が定まる.

例 2.9. モデル圏 \mathcal{C} に対して,

$$\mathcal{W}^{\text{op}} = \mathcal{W}, \quad \text{Cof}^{\text{op}} = \text{Fib}, \quad \text{Fib}^{\text{op}} = \text{Cof}$$

とすると, 組 $(\mathcal{W}^{\text{op}}, \text{Cof}^{\text{op}}, \text{Fib}^{\text{op}})$ は \mathcal{C}^{op} 上のモデル圏構造を定める. これを**反対モデル圏構造** (*opposite model structure*) と呼ぶ.

反対モデル圏の存在から, モデル圏に関する命題について双対原理が適応できることがわかる. モデル圏の基本的な性質を確認する.

命題 2.10. \mathcal{C} をモデル圏とする. \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ について次が成り立つ.

- (i) f が cofibration であることは, f がすべての acyclic fibration に関して左リフト性を持つことと同値である. すなわち $\text{Cof} = \text{LLP}(\text{Fib} \cap \mathcal{W})$ が成り立つ.
- (ii) f が acyclic cofibration であることは, f がすべての fibration に関して左リフト性を持つことと同値である. すなわち $\text{Cof} \cap \mathcal{W} = \text{LLP}(\text{Fib})$ が成り立つ.
- (iii) f が fibration であることは, f がすべての acyclic cofibration に関して右リフト性を持つことと同値である. すなわち $\text{Fib} = \text{RLP}(\text{Cof} \cap \mathcal{W})$ が成り立つ.
- (iv) f が acyclic fibration であることは, f がすべての cofibration に関して右リフト性を持つことと同値である. すなわち $\text{Fib} \cap \mathcal{W} = \text{RLP}(\text{Cof})$ が成り立つ.

Proof. (i) と (ii) だけ示す. (ii) と (iv) も同様である. f が cofibration/acyclic cofibration であるとき, acyclic fibration/fibration に関して左リフト性を持つことは定義より明らか.

f が acyclic fibration に関して左リフト性を持つとき, (MC4) より得られる分解 $f = p \circ i$ ($i \in \text{Cof}$, $p \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$) を取ると補題 1.10 より f は i の retract である. よって (MC2) より Cof は retract で閉じるから, f は cofibration である.

同様に f が fibration に関して左リフト性を持つとき, (MC4) より得られる分解 $f = p \circ i$ ($i \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$, $p \in \text{Fib}$) を取ると補題 1.10 より f は i の retract である. よって (MC2) より \mathcal{W} と Cof は retract で閉じるから, f は acyclic cofibration になる. \square

系 2.11. 積と余積を持つモデル圏 \mathcal{C} において,

- (i) Cof と $\text{Cof} \cap \mathcal{W}$ は合成と余積と pushout で閉じる.
- (ii) Fib と $\text{Fib} \cap \mathcal{W}$ は合成と積と pullback で閉じる.

Proof. 命題 2.10 と, 命題 1.11, 1.12, 1.13 より従う. \square

命題 2.12. モデル圏 \mathcal{C} の射 f について, f が弱同値である必要十分条件は, f が acyclic cofibration i と acyclic fibration p による合成 $f = p \circ i$ で表せることである.

Proof. 弱同値の合成は弱同値であるから, acyclic cofibration i と acyclic fibration p はの合成 $p \circ i$ も弱同値である.

逆に, f が弱同値のとき, (MC4) より $f = p \circ i$ となる acyclic cofibration i と fibration p が存在する. ここで f と i が弱同値だから (MC1) より p も弱同値になる. よって f は acyclic cofibration と acyclic fibration の合成で表せる. \square

系 2.13. モデル圏の射 f に対し,

f は同型射 $\iff f$ は弱同値かつ cofibration かつ fibration である.

Proof. 同型射は任意の射に対して左リフト性と右リフト性を持つから, 命題 2.10 および補題 1.6 よりすぐにわかる. \square

今確認したモデル圏の基本的な性質をまとめると次のようになる.

系 2.14. モデル圏 \mathcal{C} において,

- (i) $\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib}$ は, 同型射を含み合成で閉じる.
- (ii) 弱同値のクラス \mathcal{W} と cofibration のクラス Cof と fibration のクラス Fib は, その中の二つがもう一つを互いに決定し合う.

Proof. (i) は系 2.11 と系 2.13 より, (ii) は命題 2.10 と命題 2.12 より従う. \square

2.2 射のホモトピー

\mathcal{C} をモデル圏とする. ただし [DS95] に従って関手的分解を必ずしも持つとは限らない.

2.2.1 Cylinder 対象と左ホモトピー

対象 $A, B \in \mathcal{C}$ に対して, その余積 $A \amalg B$ の持つ標準的な射を $\text{in}_0: A \rightarrow A \amalg B$, $\text{in}_1: B \rightarrow A \amalg B$ とする. また射 $f: A \rightarrow C$ と $g: B \rightarrow C$ に対して, 余積の普遍性によって得られる

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{in}_0} & A \amalg B & \xleftarrow{\text{in}_1} & B \\ & \searrow f & \downarrow & \swarrow g & \\ & & C & & \end{array}$$

を可換にするような一意的な射を, $f + g: A \amalg B \rightarrow C$ と表す.

定義 2.15. モデル圏 \mathcal{C} の対象 A の **cylinder 対象** (*cylinder object*) とは,

- 対象 $A \wedge I \in \mathcal{C}$
- 可換図式

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{\text{id} + \text{id}} & A \\ & \searrow i & \nearrow p \\ & & A \wedge I \end{array}$$

であって p が弱同値であるもの

の組のことをいう. さらに cylinder 対象の定義において, i が cofibration であるとき $A \wedge I$ は *good* であるといい, i が cofibration かつ p が fibration であるとき $A \wedge I$ は *very good* であるという. ここで

$$\begin{aligned} i_0 &= i \circ \text{in}_0: A \xrightarrow{\text{in}_0} A \amalg A \xrightarrow{i} A \wedge I \\ i_1 &= i \circ \text{in}_1: A \xrightarrow{\text{in}_1} A \amalg A \xrightarrow{i} A \wedge I \end{aligned}$$

と置くと, 普遍性から $i = i_0 + i_1$ であることに注意する.

モデル圏の定義 2.1 の (MC4) によって, $A \in \mathcal{C}$ の very good cylinder 対象は少なくとも一つは存在する. しかし, \mathcal{C} が関手的分解を持たなければ, 対応 $A \mapsto A \wedge I$ は一般に関手にはならない.

補題 2.16. 対象 $A \in \mathcal{C}$ の cylinder 対象 $A \wedge I$ に対して, $i_0, i_1: A \rightarrow A \wedge I$ は弱同値である. さらに A が cofibrant で $A \wedge I$ が good ならば, i_0, i_1 は acyclic cofibration であり, $A \wedge I$ も cofibrant 対象になる.

Proof. i_0 についてだけ確かめる. 定義から $p \circ i_0 = p \circ i \circ \text{in}_0 = (\text{id} + \text{id}) \circ \text{in}_0 = \text{id}$ であり, 今 p も id も弱同値だから, (MC1) より i_0 も弱同値である.

さらに A が cofibrant で $A \wedge I$ が good であるとき, 余積 $A \amalg A$ が pushout

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \text{in}_0 \\ A & \xrightarrow{\text{in}_1} & A \amalg A \end{array}$$

でもあることに注意すると, A が cofibrant より $\emptyset \rightarrow A$ が cofibration で, 系 2.11 より Cof が pushout で閉じるから in_0 も cofibration である. 今 i が cofibration であるから, よって $i_0 = i \circ \text{in}_0$ も cofibration である. また射 $\emptyset \rightarrow A \xrightarrow{\text{in}_0} A \amalg A \xrightarrow{i} A \wedge I$ がすべて cofibration であるから, $A \wedge I$ も cofibrant 対象になる. \square

定義 2.17. 射 $f, g: A \rightarrow X$ について, f から g への左ホモトピー (left homotopy) とは,

- A の cylinder 対象 $A \wedge I$
- 射 $H: A \wedge I \rightarrow X$

の組であって

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{f+g} & X \\ i_0+i_1 \downarrow & \nearrow H & \\ A \wedge I & & \end{array}$$

を可換にするものこと. この条件は $H \circ i_0 = f$ かつ $H \circ i_1 = g$ であることと同値である. このとき H は $A \wedge I$ を経由するという. $A \wedge I$ が good であるとき H は good であるといい, $A \wedge I$ が very good であるとき H は very good であるという.

f から g への左ホモトピー H が存在するとき, f と g は left homotopic であるといい, $H: f \stackrel{\ell}{\sim} g$ または単に $f \stackrel{\ell}{\sim} g$ と書く.

補題 2.18. 射 $f, g: A \rightarrow X$ が left homotopic であるとき,

$$f \in \mathcal{W} \iff g \in \mathcal{W}$$

が成り立つ.

Proof. 補題 2.16 より $i_0, i_1 \in \mathcal{W}$ であるから, (MC1) より

$$f = H \circ i_0 \in \mathcal{W} \iff H \in \mathcal{W} \iff g = H \circ i_1 \in \mathcal{W}$$

となる. □

補題 2.19. 射 $f, g: A \rightarrow X$ が left homotopic であるとき, f から g への good な左ホモトピーが存在する. さらに X が fibrant ならば, f から g への very good な左ホモトピーが存在する.

Proof. f, g が left homotopic のとき, cylinder 対象 $A \wedge I$ と射 $H: A \wedge I \rightarrow X$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{f+g} & X \\ i_0+i_1 \downarrow & \nearrow H & \\ A \wedge I & & \end{array}$$

が可換になる. ここで射 $i = i_0 + i_1: A \amalg A \rightarrow A \wedge I$ に対して (MC4) より, 分解

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{i=i_0+i_1} & A \wedge I \\ i' \searrow & & \nearrow p' \\ & A \wedge I' & \end{array}$$

であって $i' \in \text{Cof}$ かつ $p' \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$ であるものが存在する。このとき

$$\begin{array}{ccc}
 A \amalg A & \xrightarrow{\text{id} + \text{id}} & A \\
 \searrow i & & \nearrow p \\
 & & A \wedge I \\
 \searrow i' & & \nearrow p' \\
 & & A \wedge I'
 \end{array}$$

は good cylinder 対象であり, $H' := H \circ p'$ が f から g への good 左ホモトピーを与える。

さらに X が fibrant であるとする。 $p \circ p' : A \wedge I' \xrightarrow{\sim} A$ に対して (MC4) と (MC1) より, 分解

$$\begin{array}{ccc}
 A \wedge I' & \xrightarrow{p \circ p'} & A \\
 \searrow i'' & & \nearrow p'' \\
 & & A \wedge I''
 \end{array}$$

であって $i'' \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ かつ $p'' \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$ であるものが存在する。このとき

$$\begin{array}{ccc}
 A \amalg A & \xrightarrow{\text{id} + \text{id}} & A \\
 \searrow i' & & \nearrow p'' \\
 & & A \wedge I' \\
 \searrow i'' & & \nearrow p'' \\
 & & A \wedge I''
 \end{array}$$

は very good cylinder 対象である。可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 A \wedge I' & \xrightarrow{H'} & X \\
 i'' \downarrow \wr & & \downarrow \\
 A \wedge I'' & \longrightarrow & *
 \end{array}$$

に対して (MC3) よりリフト $H'' : A \wedge I'' \rightarrow X$ が存在し, このとき $H'' \circ (i'' \circ i') = H' \circ i' = H \circ p' \circ i' = H \circ i = f + g$ より, H'' が f から g への very good 左ホモトピーを与える。 \square

補題 2.20. A が cofibrant ならば, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ 上の二項関係 $\overset{\ell}{\sim}$ は同値関係になる。

Proof. (反射律): 射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ に対して, A の cylinder 対象として A 自身を取れば, $f : f \overset{\ell}{\sim} f$ となることがわかる。

(対称律): 射 $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ に対して $H : f \overset{\ell}{\sim} g$ とする。 $s = (\text{in}_1 + \text{in}_0) : A \amalg A \rightarrow A \amalg A$ と置くと $(f + g) \circ s = (g + f)$ であるから

$$\begin{array}{ccc}
 A \amalg A & \xrightarrow{g+f} & X \\
 \searrow s & & \nearrow f+g \\
 & & A \amalg A \\
 \searrow i_0+i_1 & & \nearrow H \\
 & & A \wedge I \\
 \downarrow i_1+i_0 & & \\
 A \wedge I & &
 \end{array}$$

が可換になるから, $H: g \stackrel{\ell}{\sim} f$ となる.

(推移律): 射 $f, g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ に対して, $f \stackrel{\ell}{\sim} g, g \stackrel{\ell}{\sim} h$ であるとする. 補題 2.19 より $H \circ i_0 = f$ かつ $H \circ i_1 = g$ となる good 左ホモトピー $H: A \wedge I \rightarrow X$ と, $H \circ i'_0 = g$ かつ $H \circ i'_1 = h$ となる good 左ホモトピー $H': A \wedge I' \rightarrow X$ が存在する. ここで pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sim} & A \wedge I' \\ i_1 \downarrow \wr & & \downarrow b \\ A \wedge I & \xrightarrow{a} & A \wedge I'' \end{array}$$

を取ると, 補題 2.16 より $i_1, i'_0 \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ だから, 系 2.11 より $a, b \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ となる. このとき $p \circ i_1 = \text{id}_A = p' \circ i'_0$ であるから pushout の普遍性より, $p = c \circ a$ かつ $p' = c \circ b$ となる射 $c: A \wedge I'' \rightarrow A$ が一意的存在する. $a, b, p, p' \in \mathcal{W}$ だから (MC1) より $c \in \mathcal{W}$ である. 射 $j_0, j_1: A \rightarrow A \wedge I''$ を $j_0 := a \circ i_0$, $j_1 := b \circ i'_1$ と定めると, $c \circ j_0 = c \circ a \circ i_0 = p \circ i_0 = \text{id}_A$, $c \circ j_1 = c \circ b \circ i'_1 = p' \circ i'_1 = \text{id}_A$ となるから

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{\text{id} + \text{id}} & A \\ & \searrow j_0 + j_1 & \nearrow \wr c \\ & & A \wedge I'' \end{array}$$

は A の cylinder 対象となる. 再び, $H \circ i_1 = g = H' \circ i'_0$ であるから pushout の普遍性より, $H'' \circ a = H$ かつ $H'' \circ b = H'$ となる射 $H'': A \wedge I'' \rightarrow X$ が一意的存在する. このとき

$$\begin{aligned} H'' \circ (j_0 + j_1) &= H'' \circ (a \circ i_0 + b \circ i'_1) = (H'' \circ a \circ i_0 + H'' \circ b \circ i'_1) \\ &= (H \circ i_0 + H' \circ i'_1) = (f + h) \end{aligned}$$

となるから H'' は f から h への左ホモトピーとなる. □

一般に二項関係 $\stackrel{\ell}{\sim}$ で生成される同値関係を $\langle \stackrel{\ell}{\sim} \rangle$ と表し,

$$\pi^{\ell}(A, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) / \langle \stackrel{\ell}{\sim} \rangle$$

と置く. 補題 2.20 より A が cofibrant なら $\langle \stackrel{\ell}{\sim} \rangle = \stackrel{\ell}{\sim}$ である.

補題 2.21. $A \in \mathcal{C}$ を cofibrant な対象とし, $p: Y \rightarrow X$ を acyclic fibration とする. このとき
写像

$$p_*: \pi^{\ell}(A, Y) \rightarrow \pi^{\ell}(A, X); [f] \mapsto [p \circ f]$$

は well-defined な全単射写像である.

Proof. $H: f \stackrel{\ell}{\sim} g$ ならば $pH: pf \stackrel{\ell}{\sim} pg$ であるから, p_* は well-defined である.

任意の $[h] \in \pi^{\ell}(A, X)$ を取るとき, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow p \wr \\ A & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

に対して, (MC3) よりリフト $f: A \rightarrow Y$ が存在する. このとき $p_*([f]) = [p \circ f] = [h]$ となるから, p_* は全射である.

$f, g: A \rightarrow X$ について, $p_*([f]) = p_*([g])$ つまり $pf \stackrel{\ell}{\sim} pg$ であるとする. 補題 2.19 より pf から pg への good 左ホモトピー $H: A \wedge I \rightarrow X$ が存在する. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{f+g} & Y \\ i \downarrow & \searrow pf+pg & p \downarrow \wr \\ A \wedge I & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

に対して, (MC3) よりリフト $\tilde{H}: A \wedge I \rightarrow Y$ が存在し, これは f から g への左ホモトピーとなる. よって $f \stackrel{\ell}{\sim} g$ つまり $[f] = [g]$ となり, p_* は単射である. \square

補題 2.22. $X \in \mathcal{C}$ を fibrant な対象とし, $f, g: A \rightarrow X$ を射とする. このとき任意の射 $h: B \rightarrow A$ に対して, $f \stackrel{\ell}{\sim} g$ ならば $fh \stackrel{\ell}{\sim} gh$ となる.

Proof. 補題 2.19 より f から g への very good 左ホモトピー $H: A \wedge I \rightarrow X$ が存在する. A' の good cylinder 対象

$$\begin{array}{ccc} A' \amalg A' & \xrightarrow{\text{id} + \text{id}} & A' \\ i' \searrow & & \nearrow p' \\ & A' \wedge I & \end{array}$$

を一つ取る. 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A' \amalg A' & \xrightarrow{h \amalg h} & A \amalg A & \xrightarrow{i} & A \wedge I \\ i' \downarrow & \searrow \text{id} + \text{id} & & \searrow \text{id} + \text{id} & p \downarrow \wr \\ A' \wedge I & \xrightarrow{\sim} & A' & \xrightarrow{h} & A \end{array}$$

に対して, (MC3) よりリフト $k: A' \wedge I \rightarrow A \wedge I$ が存在する. このとき

$$\begin{array}{ccccc} & & & \xrightarrow{fh+gh} & \\ & & & \text{---} & \\ A' \amalg A' & \xrightarrow{h \amalg h} & A \amalg A & \xrightarrow{f+g} & X \\ i' \downarrow & & \downarrow i & \nearrow H & \\ A' \wedge I & \xrightarrow{k} & A \wedge I & & \end{array}$$

が可換になるから, Hk は fh から gh への左ホモトピーとなる. \square

補題 2.23. $X \in \mathcal{C}$ を fibrant な対象とするとき, \mathcal{C} の合成は写像

$$\pi^\ell(A, X) \times \pi^\ell(B, A) \rightarrow \pi^\ell(B, X); ([f], [h]) \mapsto [f \circ h]$$

を誘導する.

Proof. 補題 2.21 と補題 2.22 より従う. \square

2.2.2 Path 対象と右ホモトピー

対象 $A, B \in \mathcal{C}$ に対して, その積 $A \amalg B$ の持つ標準的な射を $\text{pr}_0: A \amalg B \rightarrow A$, $\text{pr}_1: A \amalg B \rightarrow B$ とする. また射 $f: C \rightarrow A$ と $g: C \rightarrow B$ に対して, 積の普遍性によって得られる

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ f \swarrow & \vdots & \searrow g \\ A & \xrightarrow{\text{pr}_0} & A \amalg B \xrightarrow{\text{pr}_1} B \end{array}$$

を可換にするような一意的な射を, $(f, g): C \rightarrow A \amalg B$ と表す.

双対的に path 対象と右ホモトピーも定義できる.

定義 2.24. モデル圏 \mathcal{C} の対象 X の path 対象 (*path object*) とは,

- 対象 $X^I \in \mathcal{C}$
- 可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & X \times X \\ i \searrow & & \nearrow p \\ & X^I & \end{array}$$

であって i が弱同値であるもの

の組のことをいう. さらに path 対象の定義において, p が fibration であるとき X^I は *good* であるといい, p が fibration かつ i が cofibration であるとき X^I は *very good* であるという. ここで

$$\begin{aligned} p_0 &= \text{pr}_0 \circ p: X^I \xrightarrow{p} X \times X \xrightarrow{\text{pr}_0} X \\ p_1 &= \text{pr}_1 \circ p: X^I \xrightarrow{p} X \times X \xrightarrow{\text{pr}_1} X \end{aligned}$$

と置くと, 普遍性から $p = (p_0, p_1)$ であることに注意する.

モデル圏の定義 2.1 の (MC4) によって, $X \in \mathcal{C}$ の very good path 対象は少なくとも一つは存在する. しかし, \mathcal{C} が関手的分解を持たなければ, 対応 $X \mapsto X^I$ は一般に関手にはならない.

補題 2.25. 対象 $X \in \mathcal{C}$ の path 対象 X^I に対して, $p_0, p_1: X^I \rightarrow X$ は弱同値である. さらに X が fibrant で X^I が good ならば, p_0, p_1 は acyclic fibration であり, X^I も fibrant 対象になる.

定義 2.26. 射 $f, g: A \rightarrow X$ について, f から g への右ホモトピー (*right homotopy*) とは,

- X の path 対象 X^I
- 射 $H: A \rightarrow X^I$

の組であって

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(f,g)} & X \times X \\ & \searrow H & \uparrow (p_0, p_1) \\ & & X^I \end{array}$$

を可換にするものごと。この条件は $p_0 \circ H = f$ かつ $p_1 \circ H = g$ であることと同値である。このとき H は X^I を経由するという。 X^I が good であるとき H は good であるといい、 X^I が very good であるとき H は very good であるという。

f から g への右ホモトピーが存在するとき、 f と g は right homotopic であるといい、 $f \stackrel{r}{\sim} g$ と書く。

補題 2.27. 射 $f, g: A \rightarrow X$ が right homotopic であるとき、

$$f \in \mathcal{W} \iff g \in \mathcal{W}$$

が成り立つ。

補題 2.28. 射 $f, g: A \rightarrow X$ が right homotopic であるとき、 f から g への good な右ホモトピーが存在する。さらに A が cofibrant ならば、 f から g への very good な右ホモトピーが存在する。

補題 2.29. X が fibrant ならば、 $\text{Hom}_C(A, X)$ 上の二項関係 $\stackrel{r}{\sim}$ は同値関係になる。

一般に二項関係 $\stackrel{r}{\sim}$ で生成される同値関係を $\langle \stackrel{r}{\sim} \rangle$ と表し、

$$\pi^r(A, X) = \text{Hom}_C(A, X) / \langle \stackrel{r}{\sim} \rangle$$

と置く。補題 2.29 より X が fibrant なら $\langle \stackrel{r}{\sim} \rangle = \stackrel{r}{\sim}$ である。

補題 2.30. $X \in C$ を fibrant な対象とし、 $i: A \rightarrow B$ を acyclic cofibration とする。このとき写像

$$i^*: \pi^r(B, X) \rightarrow \pi^r(A, X); [f] \mapsto [f \circ i]$$

は well-defined な全単射写像である。

補題 2.31. $A \in C$ を cofibrant な対象とし、 $f, g: A \rightarrow X$ を射とする。このとき任意の射 $h: X \rightarrow Y$ に対して、 $f \stackrel{r}{\sim} g$ ならば $h \circ f \stackrel{r}{\sim} h \circ g$ となる。

補題 2.32. $A \in C$ を cofibrant な対象とするとき、 C の合成は写像

$$\pi^r(X, Y) \times \pi^r(A, X) \rightarrow \pi^r(A, Y); ([h], [f]) \mapsto [h \circ f]$$

を誘導する。

2.2.3 ホモトピー

次の補題のように, domain A が cofibrant で codomain X が fibrant ならば左ホモトピーと右ホモトピーは一致する.

補題 2.33. 射 $f, g: A \rightarrow X$ に対して,

- (i) A が cofibrant のとき, $f \stackrel{\ell}{\sim} g$ ならば $f \stackrel{r}{\sim} g$ である.
- (ii) X が fibrant のとき, $f \stackrel{r}{\sim} g$ ならば $f \stackrel{\ell}{\sim} g$ である.

Proof. (ii) は (i) の双対だから, (i) だけ示す. 補題 2.19 より, good cylinder 対象

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{\text{id} + \text{id}} & A \\ & \searrow^{i_0 + i_1} & \nearrow_p \\ & & A \wedge I \end{array}$$

と射 $H: A \wedge I \rightarrow X$ で $H \circ (i_0 + i_1) = (f + g)$ となるものが存在する. A は cofibrant だから補題 2.16 より i_0 は acyclic cofibration である. X の good path 対象

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & X \times X \\ & \searrow_j & \nearrow_q \\ & & X^I \end{array}$$

を一つ取るとき, $(fp, H) \circ i_0 = (fp i_0, H i_0) = (f \circ \text{id}, f) = (\text{id}, \text{id}) \circ f$ であるから図式

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{j} & X^I \\ i_0 \downarrow \wr & & & \searrow (\text{id}, \text{id}) & \downarrow q \\ A \wedge I & \xrightarrow{(fp, H)} & X \times X & & \end{array}$$

は可換で, よって (MC3) よりリフト $K: A \wedge I \rightarrow X^I$ が存在する. このとき $q \circ K \circ i_1 = (fp, H) \circ i_1 = (fp i_1, H i_1) = (f, g)$ となるから

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(f, g)} & X \times X \\ & \searrow_{K \circ i_1} & \uparrow_q \\ & & X^I \end{array}$$

が可換になり, $K \circ i_1$ は f から g への右ホモトピーとなる. □

A を cofibrant な対象, X を fibrant な対象とすると, $\text{Hom}_C(A, X)$ 上の二項関係 $\stackrel{\ell}{\sim}$ と $\stackrel{r}{\sim}$ は一致するから, これを $\sim := \stackrel{\ell}{\sim} = \stackrel{r}{\sim}$ とする. $f \sim g$ であるとき, f と g は homotopic であるという. さらに補題 2.20 や補題 2.29 より \sim は同値関係であり, \sim による Hom 集合の商を

$$\pi(A, X) := \text{Hom}_C(A, X) / \sim = \pi^\ell(A, X) = \pi^r(A, X)$$

と置く.

注意 2.34. 射 $f, g: A \rightarrow X$ について, A は cofibrant で X は fibrant であるとする. A の good cylinder 対象 $A \wedge I$ と X の good path 対象 X^I を任意に取ったとき, 補題 2.33 の証明から

$$f \sim g \iff A \wedge I \text{ を経由する } f \text{ から } g \text{ への左ホモトピーが存在する}$$

$$f \sim g \iff X^I \text{ を経由する } f \text{ から } g \text{ への右ホモトピーが存在する}$$

が成り立つ.

命題 2.35. C をモデル圏とし, $A, X \in C$ を cofibrant かつ fibrant な対象とする. このとき任意の射 $f: A \rightarrow X$ について

$$f \text{ は弱同値である} \iff f \text{ は homotopy inverse を持つ}$$

が成り立つ. ここで f の homotopy inverse とは, $g \circ f \sim \text{id}_A$ かつ $f \circ g \sim \text{id}_X$ となるような射 $g: X \rightarrow A$ のことをいう.

Proof. f が弱同値であるとする. (MC4) より分解

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sim} & X \\ & \searrow q & \nearrow p \\ & & C \end{array}$$

が存在する. (MC1) より p も弱同値であり, X が fibrant だから C も fibrant である. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{id}_A} & A \\ q \downarrow \wr & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & * \end{array}$$

に対して (MC3) よりリフト $r: C \rightarrow A$ が存在し, このとき $r \circ q = \text{id}_A$ となる. 一方, q が acyclic cofibration であるから補題 2.30 より全単射 $q^*: \pi^r(C, C) \rightarrow \pi^r(A, C)$ が得られる. このとき $q^*([qr]) = [qrq] = [q] = q^*([\text{id}_C])$ となるから $[qr] = [\text{id}_C]$, つまり $qr \sim \text{id}_C$ となる. よって r は q の homotopy inverse である. 同様にして p の homotopy inverse s が得られ, このとき rs が f の homotopy inverse となる.

逆に f が homotopy inverse $g: X \rightarrow A$ を持つとする. (MC4) より分解

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow q & \nearrow p \\ & & C \end{array}$$

が存在する. (MC1) より p が弱同値であることを示せば十分である. $fg \sim \text{id}_X$ の左ホモトピー

を $H: X \wedge I \rightarrow X$ とする. 可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{g} & A & \xrightarrow{q} & C \\
 \downarrow i_0 & \searrow \text{in}_0 & & \searrow f & \downarrow p \\
 & & X \amalg X & & X \\
 & \swarrow i & \searrow fg + \text{id}_X & & \\
 X \wedge I & \xrightarrow{H} & & & X
 \end{array}$$

に対して, (MC3) よりリフト $H': X \wedge I \rightarrow C$ が存在する. $s = H' \circ i_1$ と置けば, $ps = pH'i_1 = Hi_1 = \text{id}_X$ が成り立つ. 一方, q は弱同値であるから, 前半の証明より homotopy inverse r を持つ. このとき $p \sim pqr = fr$ がわかる. H' は右ホモトピー $qq \sim s$ を与えるから, $sp \sim qgp \sim qgfr \sim rq \sim \text{id}_C$ となる. 特に補題 2.18 より sq が弱同値になる. 図式

$$\begin{array}{ccccc}
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 p \downarrow & & \downarrow sp & & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{s} & C & \xrightarrow{p} & X
 \end{array}$$

が可換であるから p は sp の retract となり, よって (MC2) より p は弱同値になる. \square

2.3 モデル圏のホモトピー圏

2.2 節で議論した結果を用いれば, モデル圏 \mathcal{C} に対して次の六つの圏が得られる:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_c &:= \{\text{cofibrant な対象のなす } \mathcal{C} \text{ の充満部分圏}\} \subseteq \mathcal{C}, \\
 \mathcal{C}_f &:= \{\text{fibrant な対象のなす } \mathcal{C} \text{ の充満部分圏}\} \subseteq \mathcal{C}, \\
 \mathcal{C}_{cf} &:= \{\text{cofibrant かつ fibrant な対象のなす } \mathcal{C} \text{ の充満部分圏}\} \subseteq \mathcal{C}, \\
 \pi\mathcal{C}_c &:= \{\text{cofibrant な対象とその間の射の右ホモトピー類のなす圏}\}, \\
 \pi\mathcal{C}_f &:= \{\text{fibrant な対象とその間の射の左ホモトピー類のなす圏}\}, \\
 \pi\mathcal{C}_{cf} &:= \{\text{cofibrant かつ fibrant な対象とその間の射のホモトピー類のなす圏}\}.
 \end{aligned}$$

これらを用いてモデル圏のホモトピー圏を構成する.

その際, (co)fibrant replacement/resolution を取ることが重要になってくる. これは, ホモロジー代数における入射分解や射影分解のアナロジーであり, 空間に対する胞体近似のアナロジーである.

2.3.1 ホモトピー圏

まず関手的分解を持つとは限らないモデル圏において考える.

各対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して, 定義 2.1 の (MC4) より

$\exists QX : \text{cofibrant}, \quad \exists q_X : QX \xrightarrow{\sim} X : \text{acyclic fibration},$

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \nearrow q_X \\ & & QX \end{array}$$

となる. 同様に

$\exists RX : \text{fibrant}, \quad \exists r_X : X \xrightarrow{\sim} RX : \text{acyclic cofibration},$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & * \\ & \searrow r_X & \nearrow \\ & & RX \end{array}$$

となる. このような cofibrant な対象 $QX \in \mathcal{C}$ と fibrant な対象 $RX \in \mathcal{C}$ を一つ取り固定しておく. ただし X が cofibrant なら $QX = X$, fibrant なら $RX = X$ とする.

このとき, acyclic fibration $q_X : QX \xrightarrow{\sim} X$ または単に QX を X の *cofibrant resolution* と呼び, acyclic cofibration $r_X : X \xrightarrow{\sim} RX$ または単に RX を X の *fibrant resolution* と呼ぶことにする.

注意 2.36. $X \in \mathcal{C}$ が fibrant ならば, 一意的な射 $X \rightarrow *$ が fibration であるから, $QX \rightarrow X \rightarrow *$ も fibration になり, QX も fibrant になる. 同様に, X が cofibrant ならば RX も cofibrant である.

補題 2.37. モデル圏 \mathcal{C} の射 $f : X \rightarrow Y$ に対して

$$\begin{array}{ccc} QX & \xrightarrow{\tilde{f}} & QY \\ q_X \downarrow \wr & & q_Y \downarrow \wr \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

を可換にするような射 $\tilde{f} : QX \rightarrow QY$ が存在する. さらに \tilde{f} は左ホモトピーまたは右ホモトピーの差を除いて f にしか依存せず,

$$\tilde{f} \in \mathcal{W} \iff f \in \mathcal{W}$$

が成り立つ. さらに Y が fibrant ならば, \tilde{f} は左ホモトピーまたは右ホモトピーの差を除いて f の左ホモトピー類にしか依存しない.

Proof. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & QY \\ \downarrow & & q_Y \downarrow \wr \\ QX & \xrightarrow{f \circ q_X} & Y \end{array}$$

に対して (MC3) より, リフト $\tilde{f} : QX \rightarrow QY$ が存在し, (MC1) より f が弱同値であることと \tilde{f} が弱同値であることが同値になる. \tilde{f} が左ホモトピーの差を除いて一意であることは補題 2.21 よ

り従い、右ホモトピーの差を除いて一意であることは補題 2.33 より従う。最後の主張も補題 2.22 より従う。□

注意 2.38. 補題 2.37 より、 $f = \text{id}_X$ ならば $\tilde{f} \stackrel{r}{\sim} \text{id}_{QX}$ であり、 $h = g \circ f$ ならば $\tilde{h} \stackrel{r}{\sim} \tilde{g} \circ \tilde{f}$ となる。したがって対応 $X \mapsto QX$ は、 $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$ に対し $Q(f) = [\tilde{f}] \in \pi^r(QX, QY)$ と定めることで関手

$$Q: \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$$

を定める。この関手 Q を cofibrant replacement 関手と呼ぶことがある (が、本稿ではこの用語を、関手的分解がある場合にとっておく。2.3.3 小節を見よ)。

補題 2.39. モデル圏 \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ に対して

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ r_X \downarrow \wr & & r_Y \downarrow \wr \\ RX & \xrightarrow{\bar{f}} & RY \end{array}$$

を可換にするような射 $\bar{f}: RX \rightarrow RY$ が存在する。さらに \bar{f} は右ホモトピーまたは左ホモトピーの差を除いて f にしか依存せず、

$$\bar{f} \in \mathcal{W} \iff f \in \mathcal{W}$$

が成り立つ。 X が cofibrant ならば、 \bar{f} は右ホモトピーまたは左ホモトピーの差を除いて f の右ホモトピー類にしか依存しない。

Proof. 補題 2.37 の双対である。□

注意 2.40. 補題 2.39 より、 $f = \text{id}_X$ ならば $\bar{f} \stackrel{l}{\sim} \text{id}_{RX}$ であり、 $h = g \circ f$ ならば $\bar{h} \stackrel{l}{\sim} \bar{g} \circ \bar{f}$ となる。したがって対応 $X \mapsto RX$ は、 $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$ に対し $R(f) = [\bar{f}] \in \pi^l(RX, RY)$ と定めることで関手

$$R: \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$$

を定める。この関手 R を fibrant replacement 関手と呼ぶことがある (が、本稿ではこの用語を、関手的分解がある場合にとっておく。2.3.3 小節を見よ)。

補題 2.41. 関手 $Q: \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_c$ は、部分圏 \mathcal{C}_f に制限することで関手 $Q': \pi\mathcal{C}_f \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ を誘導する。同様に関手 $R: \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_f$ は、部分圏 \mathcal{C}_c に制限することで関手 $R': \pi\mathcal{C}_c \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ を誘導する。

Proof. R が R' を誘導することだけ確認する。そのためには、 $X, Y \in \mathcal{C}_c$ と \mathcal{C} の射 $f, g: X \rightarrow Y$ に対して、 $f \stackrel{r}{\sim} g$ ならば $R(f) = R(g)$ を示せばよい。 X が cofibrant だから、これは補題 2.39 から従う。□

定義 2.42. モデル圏 \mathcal{C} に対して, \mathcal{C} のホモトピー圏 (homotopy category) $\text{Ho}\mathcal{C}$ を

- $\text{ob}(\text{Ho}\mathcal{C}) := \text{ob}(\mathcal{C})$
- $\text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(X, Y) := \text{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(R'QX, R'QY) = \pi(RQX, RQY)$

となる圏として定義する. Quillen homotopy category と呼ぶ.

注意 2.43. モデル圏 \mathcal{C} のホモトピー圏 $\text{Ho}\mathcal{C}$ は, 標準的な関手

$$\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$$

を持つ. これは射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して $\gamma(f) = R'Q(f) \in \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(X, Y)$ を対応させる関手である. X, Y が cofibrant かつ fibrant な対象であれば, その構成から

$$\gamma_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(X, Y) = \pi(X, Y)$$

は全射となる.

ホモトピー圏の定義において $R'Q$ の部分を $Q'R$ に置き換えても, 双対性から結果は変わらない. 2.3.2 小節で得られる普遍性から, それらは圏同型になる.

命題 2.44. \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ に対して

$$\gamma(f) \text{ が } \text{Ho}\mathcal{C} \text{ の同型射である} \iff f \text{ が弱同値である}$$

が成り立つ. また $\text{Ho}\mathcal{C}$ の任意の射は, \mathcal{C} の射による γ の像と \mathcal{C} の弱同値による γ の像の逆射の有限個の合成で表せる.

Proof. 構成から $\gamma(f) = R'Q(f)$ は, 射 $\tilde{f}: RQX \rightarrow RQY$ のホモトピー類であり, $\gamma(f)$ が同型であるということとは \tilde{f} が homotopy inverse を持つということである. したがって命題 2.35 と補題 2.37 と補題 2.39 より

$$\begin{aligned} \gamma(f) = [\tilde{f}] \text{ が } \text{Ho}\mathcal{C} \text{ の同型射である} &\iff \tilde{f} \text{ が homotopy inverse を持つ} \\ &\iff \tilde{f} \text{ が弱同値である} \\ &\iff \tilde{f} \text{ が弱同値である} \\ &\iff f \text{ が弱同値である} \end{aligned}$$

となる.

また $v: X \rightarrow Y$ を $\text{Ho}\mathcal{C}$ の任意の射とする. $X \in \mathcal{C}$ に対して, cofibrant resolution $q_X: QX \xrightarrow{\sim} X$ と fibrant resolution $r_{QX}: QX \xrightarrow{\sim} RQX$ は弱同値だから, $\gamma(q_X), \gamma(r_{QX})$ は同型射である. このとき $\text{Ho}\mathcal{C}$ の射 $\gamma(r_{QY}) \circ \gamma(q_Y)^{-1} \circ v \circ \gamma(q_X) \circ \gamma(r_{QX})^{-1}: RQX \rightarrow RQY$ が得られるが, 注意 2.43 より

$$\gamma_{RQX, RQY}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(RQX, RQY) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(RQX, RQY)$$

このとき $wi_0 = \text{id}_A = wi_1$ だから $F(w)F(i_0) = F(w)F(i_1)$ である. ここで w が弱同値より $F(w)$ が同型射になり, $F(i_0) = F(i_1)$ がわかる. よって $Hi_0 = f$, $Hi_1 = g$ より $F(f) = F(H)F(i_0) = F(H)F(i_1) = F(g)$ となる. \square

2.3.2 モデル圏の局所化

一般に圏の局所化は, 与えられた射のクラスを同型にうつすような関手の中で普遍的なものとして定義される.

定義 2.47. \mathcal{C} を圏とし, $\mathcal{W} \subseteq \text{mor}(\mathcal{C})$ を射のあるクラスとする. \mathcal{W} に関する \mathcal{C} の狭義局所化 (*strict localization*) とは, 圏 $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}$ と関手 $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{W}}$ の組であって,

- (i) Q は \mathcal{W} を可逆にする, すなわち任意の $w \in \mathcal{W}$ に対して $Q(w)$ は同型射になる
- (ii) \mathcal{W} を可逆にする任意の関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対して, 関手 $F': \mathcal{C}_{\mathcal{W}} \rightarrow \mathcal{D}$ が一意的に存在して $F' \circ Q = F$ となる

をみたすときをいう. 普遍性から, 狭義局所化は存在すれば一意な圏同型を除いて一意である.

以降, 狭義局所化のことを単に局所化と呼ぶ.

圏の局所化はいつでも存在するとは限らないが, モデル圏の場合, 弱同値に関する局所化は常に存在する.

定理 2.48. モデル圏 \mathcal{C} に対して, 関手 $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho} \mathcal{C}$ は弱同値のクラス \mathcal{W} に関する局所化である.

Proof. 命題 2.44 より, 関手 γ は弱同値を可逆にする.

弱同値を可逆にする関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を任意に取る. このとき関手 $F': \text{Ho} \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を

- $X \in \text{ob}(\text{Ho} \mathcal{C}) = \text{ob}(\mathcal{C})$ に対して, $F'(X) := F(X)$ とする
- $\text{Ho} \mathcal{C}$ の射 $v: X \rightarrow Y$ に対して, 命題 2.44 の証明で得た表示 (♠) より

$$v = \gamma(q_Y) \circ \gamma(r_{QY})^{-1} \circ \gamma(f) \circ \gamma(r_{QX}) \circ \gamma(q_X)^{-1}$$

となる \mathcal{C} の射 $f: RQ(X) \rightarrow RQ(Y)$ が存在する. このとき

$$F'(v) := F(q_Y) \circ F(r_{QY})^{-1} \circ F(f) \circ F(r_{QX}) \circ F(q_X)^{-1}$$

とする. \mathcal{C} の射 $g: RQ(X) \rightarrow RQ(Y)$ も $v = \gamma(q_Y) \circ \gamma(r_{QY})^{-1} \circ \gamma(g) \circ \gamma(r_{QX}) \circ \gamma(q_X)^{-1}$ をみたすとする,

$$\gamma(f) = \gamma(r_{QY}) \circ \gamma(q_Y)^{-1} \circ v \circ \gamma(q_X) \circ \gamma(r_{QX})^{-1} = \gamma(g)$$

より $f \sim g$ がわかる. このとき補題 2.46 より $F(f) = F(g)$ となるから, $F'(v)$ は well-defined である

によって定義する。このとき $F = F' \circ \gamma$ となる。このような F' の一意性も構成から明らかである。 \square

以降, $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$ のことも単に局所化と呼ぶことがある。

系 2.49. $\mathcal{C}, \mathcal{C}_j (j \in J)$ をモデル圏とすると、圏同型

$$\text{Ho}(\mathcal{C}^{\text{op}}) \cong (\text{Ho}\mathcal{C})^{\text{op}}, \quad \text{Ho}\left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j\right) \cong \prod_{j \in J} \text{Ho}(\mathcal{C}_j)$$

が成り立つ。

Proof. $\mathcal{C}, \mathcal{C}_j$ の局所化を $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$, $\gamma_j: \mathcal{C}_j \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_j)$ とする。

圏同型 $\text{Ho}(\mathcal{C}^{\text{op}}) \cong (\text{Ho}\mathcal{C})^{\text{op}}$ を示すためには、関手 $\gamma^{\text{op}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Ho}\mathcal{C})^{\text{op}}$ が局所化の普遍性を持つことを確認すればよい。 γ^{op} が \mathcal{C}^{op} の弱同値を可逆にすることは明らか。 $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ を \mathcal{C}^{op} の弱同値を可逆にする関手とすると、これは \mathcal{C} の弱同値を可逆にする関手 $\bar{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ と対応し、局所化の普遍性から $\bar{F} = \bar{F}' \circ \gamma$ となる関手 $\bar{F}': \text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ が一意的に存在する。 \bar{F}' が $F': (\text{Ho}\mathcal{C})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ に対応するとすれば、 F' は $F = F' \circ \gamma^{\text{op}}$ となる一意的な射である。 よって $\gamma^{\text{op}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Ho}\mathcal{C})^{\text{op}}$ は \mathcal{C}^{op} の弱同値による局所化である。

圏同型 $\text{Ho}\left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j\right) \cong \prod_{j \in J} \text{Ho}(\mathcal{C}_j)$ を示すためには、関手 $\prod_j \gamma_j: \prod_j \mathcal{C}_j \rightarrow \prod_j \text{Ho}(\mathcal{C}_j)$ が局所化の普遍性を持つことを確認すればよい。 $\prod_j \gamma_j$ が $\prod_j \mathcal{C}_j$ の弱同値を可逆にすることは明らか。 $F: \prod_j \mathcal{C}_j \rightarrow \mathcal{E}$ を $\prod_j \mathcal{C}_j$ の弱同値を可逆にする関手とすると、関手 $F': \prod_j \text{Ho}(\mathcal{C}_j) \rightarrow \mathcal{E}$ を

- 対象 $(X_j)_j \in \text{ob}\left(\prod_j \text{Ho}(\mathcal{C}_j)\right) = \prod_j \text{ob}(\mathcal{C}_j)$ に対して、 $F'((X_j)_j) := F((X_j)_j)$ とする
- $\prod_j \text{Ho}(\mathcal{C}_j)$ の射 $(v_j)_j: (X_j)_j \rightarrow (Y_j)_j$ に対して、命題 2.44 の証明で得た表示 (♠) より

$$v_j = \gamma_j(q_{Y_j}) \circ \gamma_j(r_{QY_j})^{-1} \circ \gamma_j(f_j) \circ \gamma_j(r_{QX_j}) \circ \gamma_j(q_{X_j})^{-1}$$

となる \mathcal{C}_j の射 $f_j: RQ(X_j) \rightarrow RQ(Y_j)$ が存在する。このとき

$$F'((v_j)_j) := (F(q_{Y_j}) \circ F(r_{QY_j})^{-1} \circ F(f_j) \circ F(r_{QX_j}) \circ F(q_{X_j})^{-1})_j$$

とする。補題 2.46 より $F'(v)$ が well-defined であることもわかる

によって定義する。このとき $F = F' \circ \prod_j \gamma_j$ となる。このような F' の一意性も構成から明らかである。 よって $\prod_j \gamma_j: \prod_j \mathcal{C}_j \rightarrow \prod_j \text{Ho}(\mathcal{C}_j)$ は $\prod_j \mathcal{C}_j$ の弱同値による局所化である。 \square

2.3.3 関手的分解を持つ場合

モデル圏 \mathcal{C} が関手的分解 (α, β) を持つとき、次の対応によって関手 $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が定まる：

- 対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して、始対象からの一意的な射を $!: \emptyset \rightarrow X$ としたとき、 $Q(X) :=$

$\text{cod } \alpha(!) = \text{dom } \beta(!)$ とする. このとき分解

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{!} & X \\ \searrow \alpha(!) & & \nearrow \beta(!) \\ & Q(X) & \end{array}$$

があり, $Q(X)$ は cofibrant な対象である.

- 射 $f: X \rightarrow Y$ に対して, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{!} & X \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow f \\ \emptyset & \xrightarrow{!} & Y \end{array}$$

を考えて, $Q(f) := \text{cod } \alpha(\text{id}, f) = \text{dom } \beta(\text{id}, f)$ とする. このとき可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \emptyset & \hookrightarrow & Q(X) & \xrightarrow[\beta(!)]{\sim} & X \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow Q(f) & & \downarrow f \\ \emptyset & \hookrightarrow & Q(Y) & \xrightarrow[\beta(!)]{\sim} & Y \end{array}$$

がある.

この関手 Q を cofibrant replacement 関手 (cofibrant replacement functor) と呼ぶ. さらに各 $X \in \mathcal{C}$ について $q_X = \beta(!): Q(X) \rightarrow X$ と置けば, これは自然変換 $q: Q \Rightarrow \text{Id}$ をなす. これを cofibrant resolution という.

同様に, 次の対応によって関手 $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が定まる:

- 対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して, 終対象への一意的な射を $!: X \rightarrow *$ としたとき, $R(X) := \text{cod } \alpha(!) = \text{dom } \beta(!)$ とする. このとき分解

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{!} & X \\ \searrow \alpha(!) & & \nearrow \beta(!) \\ & R(X) & \end{array}$$

があり, $R(X)$ は fibrant な対象である.

- 射 $f: X \rightarrow Y$ に対して, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{!} & * \\ f \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ Y & \xrightarrow{!} & * \end{array}$$

を考えると, $R(f) := \text{cod } \alpha(f, \text{id}) = \text{dom } \beta(f, \text{id})$ とする. このとき可換図式

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow[\alpha(!)]{\sim} & R(X) & \longrightarrow & * \\ f \downarrow & & \downarrow R(f) & & \downarrow \text{id} \\ Y & \xrightarrow[\alpha(!)]{\sim} & R(Y) & \longrightarrow & * \end{array}$$

がある.

この関手 R を **fibrant replacement 関手** (*fibrant replacement functor*) と呼ぶ. さらに各 $X \in \mathcal{C}$ について $r_X = \alpha(!): X \rightarrow R(X)$ と置けば, これは自然変換 $r: \text{Id} \Rightarrow R$ をなす. これを *fibrant resolution* という.

これらを用いることで, 同様にホモトピー圏を構成できる.

2.4 導来関手

モデル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が弱同値を保つとき, 局所化の普遍性から

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \gamma_{\mathcal{C}} \downarrow & & \downarrow \gamma_{\mathcal{D}} \\ \text{Ho } \mathcal{C} & \xrightarrow[\text{Ho } F]{} & \text{Ho } \mathcal{D} \end{array}$$

を可換にする関手 $\text{Ho } F$ が一意的存在する. しかし, 一般にはすべての F が弱同値を保つとは限らない. そのような場合に $\text{Ho } F$ に準じた関手を考えたものが導来関手である.

定義 2.50. \mathcal{C} をモデル圏とし, $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{C}$ を弱同値による局所化とする. 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について,

(i) F の**左導来関手** (*left derived functor*) とは, 関手 $\mathbf{L}F: \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と自然変換 $\tau: \mathbf{L}F \circ \gamma \Rightarrow F$ の組 $(\mathbf{L}F, \tau)$ であって,

- 任意の関手 $G: \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と自然変換 $\theta: G \circ \gamma \Rightarrow F$ に対して, 自然変換 $\xi: G \Rightarrow \mathbf{L}F$ が一意的存在して, $\theta = \tau \circ \xi \gamma$ となる

という普遍性が成り立つときをいう.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\ \gamma \downarrow & \nearrow F & \\ \text{Ho } \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbf{L}F} & \mathcal{D} \\ & \uparrow \tau & \end{array}$$

(ii) F の**右導来関手** (*right derived functor*) とは, 関手 $\mathbf{R}F: \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と自然変換 $\sigma: F \Rightarrow \mathbf{R}F \circ \gamma$ の組 $(\mathbf{R}F, \sigma)$ であって,

- 任意の関手 $G: \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と自然変換 $\theta: F \Rightarrow G \circ \gamma$ に対して, 自然変換 $\xi: \mathbf{R}F \Rightarrow G$ が一意的存在して, $\theta = \xi \gamma \circ \sigma$ となる

という普遍性が成り立つときをいう。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & & \\
 \downarrow \gamma & \searrow F & \\
 \text{Ho } \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbf{R}F} & \mathcal{D}.
 \end{array}$$

言い換えれば、 F の左導来関手とは局所化 γ に沿った F の右 Kan 拡張のことであり、 F の右導来関手とは局所化 γ に沿った F の左 Kan 拡張のことである。普遍性から、左導来関手や右導来関手は、存在すれば一意な自然同型を除いて一意である。

注意 2.51. 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が弱同値を可逆にするならば、定理 2.48 より $F = F' \circ \gamma$ となる関手 $F': \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が一意に存在し、系 2.45 により (F', id) が F の左導来関手 $\mathbf{L}F$ かつ右導来関手 $\mathbf{R}F$ になることがわかる。

補題 2.52. \mathcal{C} をモデル圏とする。

- (i) 関手 $F: \mathcal{C}_c \rightarrow \mathcal{D}$ が (cofibrant 対象の間の) acyclic cofibration を可逆にするとき、 \mathcal{C}_c の射 $f, g: A \rightarrow B$ が \mathcal{C} の射として right homotopic ならば、 $F(f) = F(g)$ となる。特に F は関手 $\pi \mathcal{C}_c \rightarrow \mathcal{D}$ を誘導する。
- (ii) 関手 $F: \mathcal{C}_f \rightarrow \mathcal{D}$ が (fibrant 対象の間の) acyclic fibration を可逆にするとき、 \mathcal{C}_f の射 $f, g: X \rightarrow Y$ が \mathcal{C} の射として left homotopic ならば、 $F(f) = F(g)$ となる。特に F は関手 $\pi \mathcal{C}_f \rightarrow \mathcal{D}$ を誘導する。

Proof. (ii) は (i) の双対だから、(i) だけ示す。

補題 2.28 より f から g への very good な右ホモトピー $H: A \rightarrow B^I$ が存在する：

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & B \times B \\
 \swarrow w & & \nearrow (p_0, p_1) \\
 & B^I &
 \end{array}, \quad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{(f, g)} & B \times B \\
 \searrow H & & \uparrow (p_0, p_1) \\
 & B^I &
 \end{array}$$

ここで $B \in \mathcal{C}_c$ だから B^I も cofibrant 対象であり、 w は \mathcal{C}_c の射である。仮定より $F(w)$ は同型射である。このとき $p_0 w = \text{id}_B = p_1 w$ より $F(p_0)F(w) = F(p_1)F(w)$ となるから $F(p_0) = F(p_1)$ がわかる。よって $p_0 H = f$, $p_1 H = g$ より $F(f) = F(p_0)F(H) = F(p_1)F(H) = F(g)$ となる。□

命題 2.53. \mathcal{C} をモデル圏とする。

- (i) 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が、 \mathcal{C} の cofibrant 対象の間の弱同値を可逆にするとき、 F の左導来関手 $(\mathbf{L}F, \tau)$ が存在する。さらにすべての cofibrant 対象 $X \in \mathcal{C}$ について $\tau_X: \mathbf{L}F(X) \rightarrow$

$F(X)$ は \mathcal{D} の同型射になる.

- (ii) 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が, \mathcal{C} の fibrant 対象の間の弱同値を可逆にするとき, F の右導来関手 $(\mathbf{R}F, \sigma)$ が存在する. さらにすべての fibrant 対象 $X \in \mathcal{C}$ について $\sigma_X: F(X) \rightarrow \mathbf{R}F(X)$ は \mathcal{D} の同型射になる.

Proof. (ii) は (i) の双対だから, (i) だけ示す.

合成関手 $\mathcal{C}_c \hookrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ を考えると, これは特に acyclic cofibration を可逆にするから, 補題 2.52 により関手 $F': \pi\mathcal{C}_c \rightarrow \mathcal{D}$ が誘導される. このとき $F' \circ Q: \mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_c \rightarrow \mathcal{D}$ は弱同値を可逆にする.

\therefore \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ に対して, $F' \circ Q(f) = F'([\tilde{f}]) = F(\tilde{f})$ である. f が弱同値であるとき補題 2.37 より射 $\tilde{f}: QX \rightarrow QY$ は cofibrant 対象の間の弱同値になるから, 仮定より $F' \circ Q(f) = F(\tilde{f})$ は同型射になる.

したがって局所化の普遍性により

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{Q} & \pi\mathcal{C}_c \\ \gamma \downarrow & & \downarrow F' \\ \mathbf{Ho}\mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbf{L}F} & \mathcal{D} \end{array}$$

を可換にする関手 $\mathbf{L}F: \mathbf{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が一意に存在する. また各 $X \in \mathcal{C}$ に対して $\mathbf{L}F(\gamma(X)) = \mathbf{L}F(X) = F(QX)$ であり, $\tau_X := F(q_X): \mathbf{L}F(X) = F(QX) \rightarrow F(X)$ と置くとこれは自然変換 $\tau: \mathbf{L}F \circ \gamma \Rightarrow F$ を与える. X が cofibrant 対象ならば, $QX = X$ で $q_X = \text{id}$ だから, $\tau_X = F(\text{id}) = \text{id}$ であることに注意する.

このとき組 $(\mathbf{L}F, \tau)$ が F の左導来関手であることを示す. 関手 $G: \mathbf{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と自然変換 $\theta: G \circ \gamma \Rightarrow F$ を任意に取る. 各 $X \in \mathcal{C}$ に対して

$$\xi_X := \theta_{QX} \circ G(\gamma(q_X))^{-1}: G(X) \rightarrow G(QX) \rightarrow F(QX) = \mathbf{L}F(X)$$

と置くと, \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ について

$$\begin{array}{ccccc} G(X) & \xrightarrow{G(\gamma(q_X))^{-1}} & G(QX) & \xrightarrow{\theta_{QX}} & F(QX) = \mathbf{L}F(X) \\ G \circ \gamma(f) \downarrow & & \downarrow G \circ \gamma(\tilde{f}) & & \downarrow F(\tilde{f}) = F'(Q(f)) = \mathbf{L}F \circ \gamma(f) \\ G(Y) & \xrightarrow{G(\gamma(q_Y))^{-1}} & G(QY) & \xrightarrow{\theta_{QY}} & F(QY) = \mathbf{L}F(Y) \end{array}$$

が可換になるから, $\{\xi_X\}_X$ は自然変換 $\xi: G \circ \gamma \Rightarrow \mathbf{L}F \circ \gamma$ をなす. 系 2.45 より自然変換 $\xi: G \Rightarrow \mathbf{L}F$ も得る. このとき θ の自然性を用いれば, $X \in \mathcal{C}$ に対し $\tau_X \circ \xi_{\gamma(X)} = F(q_X) \circ \theta_{QX} \circ G(\gamma(q_X))^{-1} = \theta_X$ となり, $\tau \circ \xi \gamma = \theta$ が成り立つことがわかる. 別な自然変換 $\xi': G \Rightarrow \mathbf{L}F$ も $\tau \circ \xi' \gamma = \theta$ をみたすとする. QX が cofibrant 対象だから $\tau_{QX} = \text{id}$ であることより, $\theta_{QX} = \tau_{QX} \circ \xi'_{QX} = \xi'_{QX}$ である. $\mathbf{L}F \circ \gamma(q_X) = F([\tilde{q}_X]) = F([\text{id}]) = F(\text{id}) = \text{id}$ に注意すれば, ξ' の自然性から

$$\xi'_X = \mathbf{L}F(\gamma(q_X)) \circ \xi'_{QX} \circ G(\gamma(q_X))^{-1} = \text{id} \circ \theta_{QX} \circ G(\gamma(q_X))^{-1} = \xi_X$$

となり, 自然変換として $\xi' = \xi$ がわかる. 以上より $(\mathbf{L}F, \tau)$ が F の左導来関手となる. \square

右 Kan 拡張

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \\ \downarrow K & \searrow F & \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\text{Ran}_K F} & \mathcal{D} \\ \uparrow \varepsilon & & \end{array}$$

が**絶対右 Kan 拡張** (*absolute right Kan extension*) であるとは, 任意の関手 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ で保たれる, すなわち組 $(G \circ \text{Ran}_K F, G\varepsilon)$ が再び右 Kan 拡張になるときをいう. 同様に**絶対左 Kan 拡張** (*absolute left Kan extension*) も定義される. 次の定理は, 命題 2.53 で得られた右 Kan 拡張が絶対的であることを示す.

定理 2.54. \mathcal{C} をモデル圏とする.

- (i) 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が, \mathcal{C} の cofibrant 対象の間の弱同値を可逆にすると, F の左導来関手 $(\mathbf{L}F, \tau)$ は, 局所化 γ に沿った F の絶対右 Kan 拡張である.
- (ii) 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が, \mathcal{C} の fibrant 対象の間の弱同値を可逆にすると, F の右導来関手 $(\mathbf{R}F, \sigma)$ は, 局所化 γ に沿った F の絶対左 Kan 拡張である.

Proof. (ii) は (i) の双対だから, (i) だけ示す.

任意の関手 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ に対して, GF は明らかに \mathcal{C} の cofibrant 対象の間の弱同値を可逆にするから, 命題 2.53 より左導来関手 $(\mathbf{L}(GF), \tau')$ が存在する. 命題 2.53 での構成から, これは

$$\mathbf{L}(GF) = G \circ \mathbf{L}F, \quad \tau' = G\tau$$

をみることがわかる. したがって $(\mathbf{L}(GF), \tau') = (G \circ \mathbf{L}F, G\tau)$ が右 Kan 拡張になるから, $(\mathbf{L}F, \tau)$ は絶対右 Kan 拡張である. \square

定義 2.55. \mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏, $\gamma_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$, $\gamma_{\mathcal{D}}: \mathcal{D} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{D}$ を弱同値による局所化とする. 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について,

- (i) F の**全左導来関手** (*total left derived functor*) とは, 関手 $\gamma_{\mathcal{D}} \circ F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{D}$ の左導来関手 $\mathbb{L}F = \mathbf{L}(\gamma_{\mathcal{D}} \circ F): \text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{D}$ のことをいう.
- (ii) F の**全右導来関手** (*total right derived functor*) とは, 関手 $\gamma_{\mathcal{D}} \circ F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{D}$ の右導来関手 $\mathbb{R}F = \mathbf{R}(\gamma_{\mathcal{D}} \circ F): \text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{D}$ のことをいう.

系 2.56. \mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏とする.

- (i) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を cofibrant 対象の間の弱同値を弱同値にうつすとき, F の全左導来関手 $\mathbb{L}F$ が存在する.

- (ii) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を fibrant 対象の間の弱同値を弱同値にうつすとき, F の全右導来関手 $\mathbb{R}F$ が存在する.

Proof. 全導来関手は関手 $\gamma_{\mathcal{D}} \circ F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{D}$ の導来関手であるから, 命題 2.53 よりその存在がわかる. \square

命題 2.57. \mathcal{C}, \mathcal{D} を関手的分解を持つモデル圏とする.

- (i) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を cofibrant 対象の間の弱同値を弱同値にうつすとき, $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ を cofibrant replacement 関手とすると

$$\text{Ho } F \circ \text{Ho } Q: \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{C}_c \rightarrow \text{Ho } \mathcal{D}$$

は F の全左導来関手になる.

- (ii) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を fibrant 対象の間の弱同値を弱同値にうつすとき, $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ を fibrant replacement 関手とすると

$$\text{Ho } F \circ \text{Ho } R: \text{Ho } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{C}_f \rightarrow \text{Ho } \mathcal{D}$$

は F の全右導来関手になる.

Proof. 命題 2.53 と同様にして, 導来関手の普遍性を持つことが確認できる. \square

注意 2.58. 命題 2.53 で構成した導来関手は, cofibrant replacement 関手 Q , つまり各 X に対応する cofibrant 対象 QX の取り方に依存する. 言い換えれば, 導来関手の構成にはモデル圏の構造だけでなく, QX の選択も必要となる. [Hov99] ではこのような状況を避けるために関手的分解を持つモデル圏だけを考えている. つまり, cofibrant replacement 関手をモデル圏の構造から標準的に得られるようにして, 導来関手をモデル圏の構造だけに依存して定義されるようにしている.

2.5 Quillen 随伴と Quillen 同値

随伴とは, 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ と自然な全単射

$$\Phi = \Phi_{A,X}: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(X))$$

の組 $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ のことであった. 自然な全単射 Φ から **単位 (unit)** と呼ばれる自然な射 $\eta = \eta_A: A \rightarrow GF(A)$ と **余単位 (counit)** と呼ばれる自然な射 $\varepsilon = \varepsilon_X: FG(X) \rightarrow X$ が得られ, \mathcal{D} の射 $g: F(A) \rightarrow X$ や \mathcal{C} の射 $f: A \rightarrow G(X)$ について

$$\Phi(g) = G(g) \circ \eta_A, \quad \Phi^{-1}(f) = \varepsilon_X \circ F(f)$$

となっているのであった.

補題 2.59. 圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の随伴 $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と \mathcal{C} の射 $f: A \rightarrow B$ と \mathcal{D} の射 $g: X \rightarrow Y$ について,

$$F(f) \boxtimes g \iff f \boxtimes G(g)$$

が成り立つ.

Proof. 随伴 $F \dashv G$ があるとき, 図式

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{u} & X \\ F(f) \downarrow & & \downarrow g \\ F(B) & \xrightarrow{v} & Y, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi(u)} & G(X) \\ f \downarrow & & \downarrow G(g) \\ B & \xrightarrow{\Phi(v)} & G(Y) \end{array}$$

の可換性は同値である. このことから主張は直ちに従う. □

\mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏とする.

命題 2.60. モデル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の随伴 $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対して, 次は同値である.

- (i) F は cofibration と acyclic cofibration を保つ.
- (ii) G は fibration と acyclic fibration を保つ.
- (iii) F は cofibration を保ち, G は fibration を保つ.
- (iv) F は acyclic cofibration を保ち, G は acyclic fibration を保つ.

Proof. (i) \Leftrightarrow (iii) だけ示す. 他も同様である. (i) \Rightarrow (iii): F が cofibration と acyclic cofibration を保つとすると, $F(\text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{C})) \subseteq \text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{D})$ である. このとき \mathcal{D} の射 g について, 命題 2.10 と補題 2.59 より

$$\begin{aligned} g \in \text{Fib}(\mathcal{D}) &\iff \text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{D}) \boxtimes g \\ &\implies F(\text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{C})) \boxtimes g \\ &\iff \text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{C}) \boxtimes G(g) \\ &\iff G(g) \in \text{Fib}(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

となるから, G は fibration を保つ.

(iii) \Rightarrow (i): F が cofibration を保ち, G が fibration を保つとすると, $G(\text{Fib}(\mathcal{D})) \subseteq \text{Fib}(\mathcal{C})$ である. このとき \mathcal{C} の射 f について, 命題 2.10 と補題 2.59 より

$$\begin{aligned} f \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{C}) &\iff f \boxtimes \text{Fib}(\mathcal{C}) \\ &\implies f \boxtimes G(\text{Fib}(\mathcal{D})) \\ &\iff F(f) \boxtimes \text{Fib}(\mathcal{D}) \\ &\iff F(f) \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{D}) \end{aligned}$$

となるから, F は acyclic cofibration を保つ. □

定義 2.61. モデル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の随伴 $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が Quillen 随伴 (Quillen adjunction) であるとは, 命題 2.60 の同値な条件をみたすときをいう. このとき左随伴 F を左 Quillen 関手 (left Quillen functor) といい, 右随伴 G を右 Quillen 関手 (right Quillen functor) という.

注意 2.62. 左随伴は余極限を保つから, 左 Quillen 関手 F は始対象を保ち, 特に cofibrant な対象を保存する. 双対的に, 右 Quillen 関手 G は終対象を保ち, 特に fibrant な対象を保存する.

例 2.63. \mathcal{C} を完備かつ余完備なモデル圏, J を集合とする.

このとき \mathcal{C} が完備であることから, 積を取る関手 $\prod: \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$ は対角関手 $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$ の右随伴になっている. 積圏 \mathcal{C}^J に積モデル圏構造を入れてモデル圏とすると, 随伴 $\Delta \dashv \prod$ において左随伴 Δ は cofibration と acyclic cofibration を保つから, これは Quillen 随伴である. 特に $\prod: \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$ は右 Quillen 関手である.

同様に, 余積を取る関手 $\coprod: \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$ は対角関手 $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$ の左随伴になっている. 積圏 \mathcal{C}^J に積モデル圏構造を入れてモデル圏とすると, 随伴 $\coprod \dashv \Delta$ において右随伴 Δ は fibration と acyclic fibration を保つから, これは Quillen 随伴である. 特に $\coprod: \mathcal{C}^J \rightarrow \mathcal{C}$ は左 Quillen 関手である.

補題 2.64 (K. Brown の補題). \mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏とすると, 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について次が成り立つ.

- (i) F が \mathcal{C} の cofibrant な対象の間の acyclic cofibration を \mathcal{D} の弱同値にうつすとき, F は \mathcal{C} の cofibrant な対象の間のすべての弱同値を \mathcal{D} の弱同値にうつす.
- (ii) F が \mathcal{C} の fibrant な対象の間の acyclic fibration を \mathcal{D} の弱同値にうつすとき, F は \mathcal{C} の fibrant な対象の間のすべての弱同値を \mathcal{D} の弱同値にうつす.

特に, F が左 Quillen 関手であるとき, F は cofibrant な対象の間の弱同値を保つ. 双対的に $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ が右 Quillen 関手であるとき, G は fibrant な対象の間の弱同値を保つ.

Proof. (ii) は (i) の双対だから, (i) だけ示す. $A, B \in \mathcal{C}$ を cofibrant 対象とし, $f: A \rightarrow B$ をその間の弱同値とする. 射 $f + \text{id}_B: A \coprod B \rightarrow B$ に対して, (MC4) より $(f + \text{id}_B) = p \circ i$ となる cofibration $i: A \coprod B \rightarrow C$ と acyclic fibration $p: C \rightarrow B$ が存在する. ここで図式

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \hookrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \text{in}_0 \\ B & \xrightarrow{\text{in}_1} & A \coprod B \end{array}$$

は pushout 図式であるから, 系 2.11 より in_0, in_1 は cofibration になり, $i \circ \text{in}_0: A \rightarrow C$ と $i \circ \text{in}_1: B \rightarrow C$ も cofibration である. 特に C が cofibrant な対象になる. $p \circ i \circ \text{in}_0 = f$ と $p \circ i \circ \text{in}_1 = \text{id}_B$ と p が弱同値であるから, (MC1) より $i \circ \text{in}_0$ と $i \circ \text{in}_1$ も弱同値である. よって仮定か

ら $F(i \circ \text{in}_0), F(i \circ \text{in}_1)$ が弱同値になる. このとき $F(p) \circ F(i \circ \text{in}_1) = F(\text{id}_B) = \text{id}_{F(B)}$ が弱同値であることから, (MC1) より $F(p)$ が弱同値であることがわかり, したがって $F(f) = F(p) \circ F(i \circ \text{in}_0)$ も弱同値となる. \square

命題 2.65. \mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏, $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ をその間の Quillen 随伴とする. このとき全導来関手 $\mathbb{L}F, \mathbb{R}G$ が存在し, これらは随伴 $\langle \mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G, \tilde{\Phi} \rangle: \text{Ho}\mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{D}$ をなす.

Proof. 左 Quillen 関手 F は acyclic cofibration を保つから, K. Brown の補題 2.64 より cofibrant 対象の間の弱同値を弱同値にうつす. よって系 2.56 より全左導来関手 $\mathbb{L}F$ が存在する. 双対的に右 Quillen 関手 G の全右導来関手 $\mathbb{R}G$ も存在する.

まず cofibrant 対象 $A \in \mathcal{C}$ と fibrant 対象 $X \in \mathcal{D}$ に対して, 全単射

$$\Phi: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(X))$$

のもとでホモトピー関係が対応することを確認する. \mathcal{D} の射 $f, g: F(A) \rightarrow X$ について $f \sim g$ であるとき, 特に $f \stackrel{r}{\sim} g$ であるから, 補題 2.28 より f から g への good 右ホモトピー $H: F(A) \rightarrow X^I$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & X \times X \\ & \searrow i \sim & \uparrow p \\ & & X^I \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{(f, g)} & X \times X \\ & \searrow H & \uparrow p \\ & & X^I \end{array}$$

ここで X が fibrant であるから good path 対象 X^I も fibrant である. 右 Quillen 関手 G は積と fibration と fibrant 対象の間の弱同値を保つから, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} G(X) & \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} & G(X) \times G(X) \\ & \searrow G(i) \sim & \uparrow G(p) \\ & & G(X^I) \end{array}$$

が得られ, $G(X^I)$ は $G(X)$ の good path 対象となることがわかる. 全単射 Φ のもとで射 $(f, g): F(A) \rightarrow X \times X$ は $(\Phi(f), \Phi(g)): A \rightarrow G(X) \times G(X)$ に対応することから, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(\Phi(f), \Phi(g))} & G(X) \times G(X) \\ & \searrow \Phi(H) & \uparrow G(p) \\ & & G(X^I) \end{array}$$

が成り立ち, $\Phi(H)$ は $\Phi(f)$ から $\Phi(g)$ への右ホモトピーとなる. よって $\Phi(f) \sim \Phi(g)$ が成り立つ. 同様に $\Phi(f) \sim \Phi(g)$ ならば $f \sim g$ が成り立つことがわかるから, 全単射 Φ のもとでホモトピー関係が対応する. したがって Φ は自然な全単射

$$\pi_{\mathcal{C}}(F(A), X) \cong \pi_{\mathcal{D}}(A, G(X))$$

を誘導する.

さて $A \in \mathcal{C}$ と $X \in \mathcal{D}$ を任意の対象とする. \mathcal{C} の cofibrant replacement 関手を Q , \mathcal{D} の fibrant replacement 関手を R で表すとすると, 全導来随伴の構成から $\mathbb{L}F(A) = F(QA)$ は cofibrant で $\mathbb{R}G(X) = G(RX)$ は fibrant である. よって全単射

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}: \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}\mathcal{D}}(\mathbb{L}F(A), X) &\stackrel{(\gamma(r_X))^*}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}\mathcal{D}}(F(QA), RX) \\ &\cong \pi_{\mathcal{D}}(F(QA), RX) \\ &\cong \pi_{\mathcal{C}}(QA, G(RX)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}\mathcal{C}}(QA, G(RX)) \\ &\stackrel{(\gamma(q_A)^{-1})^*}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}\mathcal{C}}(A, \mathbb{R}G(X)) \end{aligned}$$

が得られる. これは関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathrm{Set}$ としての自然同型を与え, 系 2.45 より関手 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}) \cong \mathrm{Ho}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Ho}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathrm{Set}$ としての自然同型にもなる. したがって随伴 $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G$ が成り立つ. \square

この随伴 $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G$ を $F \dashv G$ の導来随伴 (derived adjunction) という. 導来随伴 $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G$ の unit を $\tilde{\eta}$, counit を $\tilde{\varepsilon}$ とすると, 命題 2.65 の証明より

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_A &= \gamma(\Phi(r_{F(QA)})) \circ \gamma(q_A)^{-1} = \gamma(G(r_{F(QA)})) \circ \gamma(\eta_{QA}) \circ \gamma(q_A)^{-1} \\ &\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tilde{\eta}_A} & \mathbb{R}G(\mathbb{L}F(A)) = GR(FQ(A)) \\ \gamma(q_A)^{-1} \downarrow & & \nearrow \gamma(G(r_{F(QA)})) \\ QA & \xrightarrow[\gamma(\eta_{QA})]{} & G(F(QA)) \end{array} \\ \tilde{\varepsilon}_X &= \gamma(r_X)^{-1} \circ \gamma(\Phi^{-1}(q_{G(RX)})) = \gamma(r_X)^{-1} \circ \gamma(\varepsilon_{RX}) \circ \gamma(F(q_{G(RX)})) \\ &\begin{array}{ccc} FQ(GR(X)) = \mathbb{L}F(\mathbb{R}G(X)) & \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}_X} & X \\ \searrow \gamma(F(q_{G(RX)})) & & \uparrow \gamma(r_X)^{-1} \\ & F(G(RX)) & \xrightarrow[\gamma(\varepsilon_{RX})]{} RX \end{array} \end{aligned}$$

である.

例 2.66. \mathcal{C} を完備かつ余完備なモデル圏, J を集合とする. 積圏 \mathcal{C}^J に積モデル圏構造を入れてモデル圏とする. 例 2.63 より, 随伴 $\coprod \dashv \Delta \dashv \prod$ は Quillen 随伴であった.

ここで対角関手 $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$ が弱同値を保つことから, 注意 2.51 より Δ の全左導来関手と全右導来関手は一致する. これは, 系 2.49 の同型 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}^J) \cong (\mathrm{Ho}\mathcal{C})^J$ を通じて $\mathrm{Ho}\mathcal{C}$ の対角関手 $\Delta: \mathrm{Ho}\mathcal{C} \rightarrow (\mathrm{Ho}\mathcal{C})^J$ になる.

よって命題 2.65 より Quillen 随伴 $\coprod \dashv \Delta \dashv \prod$ の導来随伴として, 随伴 $\mathbb{L}(\coprod) \dashv \Delta \dashv \mathbb{R}(\prod)$ が得られる. 特に $\mathrm{Ho}\mathcal{C}$ の対角関手 Δ が左右の随伴を持つから, $\mathrm{Ho}\mathcal{C}$ はすべての積と余積を持つ.

命題 2.67. \mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏, $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ をその間の Quillen 随伴とする. このとき次は同値である.

- (i) 導来随伴 $\langle \mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G, \tilde{\Phi} \rangle$ は随伴同値である.
- (ii) 任意の cofibrant 対象 $A \in \mathcal{C}$ について, \mathcal{C} の射 $A \xrightarrow{\eta_A} G(F(A)) \xrightarrow{G(r_{FA})} GR(F(A))$ は弱同値であり, 任意の fibrant 対象 $X \in \mathcal{D}$ について, \mathcal{D} の射 $FQ(GX) \xrightarrow{F(q_{GX})} F(G(X)) \xrightarrow{\varepsilon_X} X$ は弱同値である.
- (iii) 任意の cofibrant 対象 $A \in \mathcal{C}$ と任意の fibrant 対象 $X \in \mathcal{D}$ に対して, \mathcal{D} の射 $g: F(A) \rightarrow X$ が弱同値であることと \mathcal{C} の射 $\Phi(g): A \rightarrow G(X)$ が弱同値であることは同値である.

Proof. (i) \Leftrightarrow (ii): 対象 $A \in \mathcal{C}$, $X \in \mathcal{D}$ に対して, 命題 2.44 より

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_A = \gamma(\Phi(r_{FQA})) \circ \gamma(q_A)^{-1} \text{ が同型射} &\iff \gamma(\Phi(r_{FQA})) \text{ が同型射} \\ &\iff \Phi(r_{FQA}) = G(r_{FQA}) \circ \eta_{QA} \text{ が弱同値} \\ \tilde{\varepsilon}_X = \gamma(r_X)^{-1} \circ \gamma(\Phi^{-1}(q_{GRX})) \text{ が同型射} &\iff \gamma(\Phi^{-1}(q_{GRX})) \text{ が同型射} \\ &\iff \Phi^{-1}(q_{GRX}) = \varepsilon_{RX} \circ F(q_{GRX}) \text{ が弱同値} \end{aligned}$$

となる. よって $A \in \mathcal{C}$ が cofibrant なら $QA = A$ で, $X \in \mathcal{D}$ が fibrant なら $RX = X$ であるから, 主張が成り立つ.

(iii) \Rightarrow (ii): cofibrant な対象 $A \in \mathcal{C}$ に対して, 弱同値 $r_{F(A)}: F(A) \xrightarrow{\sim} R(F(A))$ を考えると, (iii) より $\Phi(r_{FA}) = G(r_{FA}) \circ \eta_A: A \rightarrow GR(F(A))$ も弱同値になる. 同様に fibrant な対象 $X \in \mathcal{D}$ に対して, (iii) より $\Phi^{-1}(q_{GX}) = \varepsilon_X \circ F(q_{GX}): FQ(GX) \rightarrow X$ も弱同値になる.

(ii) \Rightarrow (iii): cofibrant 対象 $A \in \mathcal{C}$ と任意の fibrant 対象 $X \in \mathcal{D}$ を任意に取る. \mathcal{D} の射 $g: F(A) \rightarrow X$ が弱同値であるとき, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & GF(A) & \xrightarrow{G(g)} & G(X) \\ \parallel & & \downarrow G(r_{FA}) & & \downarrow G(r_X) \\ A & \xrightarrow{\Phi(r_{FA})} & GR(F(A)) & \xrightarrow{G(\bar{g})} & G(RX) \end{array}$$

を考える. まず (ii) から $\Phi(r_{FA}) = G(r_{FA}) \circ \eta_A$ は弱同値である. 次に g が弱同値であることから補題 2.39 より $\bar{g}: R(F(A)) \rightarrow RX$ が弱同値であり, K. Brown の補題 2.64 より右 Quillen 関手 G は fibrant 対象の間の弱同値を保つから, $G(\bar{g}), G(r_X)$ も弱同値である. よって (MC1) より, $G(g) \circ \eta_A = \Phi(g)$ も弱同値であることがわかる.

同様に \mathcal{C} の射 $f = \Phi(g): A \rightarrow G(X)$ が弱同値であるとき, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} F(QA) & \xrightarrow{F(\tilde{f})} & FQ(GX) & \xrightarrow{\Phi^{-1}(q_{GX})} & X \\ F(q_X) \downarrow & & \downarrow F(q_{GX}) & & \parallel \\ F(A) & \xrightarrow{F(f)} & FG(X) & \xrightarrow{\varepsilon_X} & X \end{array}$$

を考えれば、上辺と左辺が弱同値になり、(MC1) より $\varepsilon_X \circ F(f) = \Phi^{-1}(f)$ も弱同値になることがわかる。□

定義 2.68. モデル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の Quillen 随伴 $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が Quillen 同値 (Quillen equivalence) であるとは、命題 2.67 の同値な条件をみたすときをいう。

系 2.69. \mathcal{C}, \mathcal{D} をモデル圏, $\langle F \dashv G, \Phi \rangle, \langle F' \dashv G', \Phi' \rangle, \langle F' \dashv G, \Phi'' \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ をその間の Quillen 随伴とすると、

$$\begin{aligned} \langle F \dashv G, \Phi \rangle \text{ は Quillen 同値である} &\iff \langle F' \dashv G', \Phi' \rangle \text{ は Quillen 同値である} \\ \langle F \dashv G, \Phi \rangle \text{ は Quillen 同値である} &\iff \langle F' \dashv G, \Phi'' \rangle \text{ は Quillen 同値である} \end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. 命題 2.67 より

$$\begin{aligned} F \dashv G \text{ は Quillen 同値である} &\iff \mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G \text{ は随伴同値である} \\ &\iff \mathbb{L}F \text{ は圏同値である} \\ &\iff \mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G' \text{ は随伴同値である} \\ &\iff F \dashv G' \text{ は Quillen 同値である} \end{aligned}$$

となる。二つ目の主張も同様。□

この系より F を単に Quillen 同値であると言ったりする。

系 2.70. $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ をモデル圏, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ を左 Quillen 関手 (または右 Quillen 関手) とする。このとき F, G, GF のうち二つが Quillen 同値であるならば、もう一つも Quillen 同値である。

Proof. 自然同型 $\mathbb{L}(GF) \cong \mathbb{L}G \circ \mathbb{L}F$ が成り立つことから、すぐにわかる。□

系 2.71. モデル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の Quillen 随伴 $\langle F \dashv G, \Phi \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について、次は同値である。

- (i) $\langle F \dashv G, \Phi \rangle$ は Quillen 同値である。
- (ii) F は次をみたす。
 - (a) F は cofibrant 対象の間の弱同値を反射する。すなわち cofibrant 対象 $A, B \in \mathcal{C}$ の間の射 $f: A \rightarrow B$ に対して、 $F(f)$ が弱同値ならば f も弱同値である。
 - (b) すべての fibrant 対象 $X \in \mathcal{D}$ に対して、 \mathcal{D} の射 $FQ(GX) \xrightarrow{F(q_{GX})} F(G(X)) \xrightarrow{\varepsilon_X} X$ は弱同値である。
- (iii) G は次をみたす。
 - (a) G は fibrant 対象の間の弱同値を反射する。すなわち fibrant 対象 $X, Y \in \mathcal{D}$ の間の射 $g: X \rightarrow Y$ に対して、 $G(g)$ が弱同値ならば g も弱同値である。

(b) すべての cofibrant 対象 $A \in \mathcal{C}$ に対して, \mathcal{C} の射 $A \xrightarrow{\eta_A} G(F(A)) \xrightarrow{G(r_{FA})} GR(FA)$ は弱同値である.

Proof. (i) \Leftrightarrow (ii) だけ示す. (i) \Leftrightarrow (iii) も同様である.

(i) \Rightarrow (ii): 命題 2.67 の (ii) より, (b) は成り立つ. cofibrant 対象 $A, B \in \mathcal{C}$ の間の射 $f: A \rightarrow B$ について, $F(f)$ が弱同値であるとする. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} F(QA) & \xrightarrow{F(\tilde{f})} & F(QB) \\ F(q_A) \downarrow & & \downarrow F(q_B) \\ F(A) & \xrightarrow[\sim]{F(f)} & F(B) \end{array}$$

において, K. Brown の補題 2.64 より F が cofibrant 対象の間の弱同値を保つから, $F(q_A), F(q_B)$ は弱同値になる. よって (MC1) より, $F(\tilde{f})$ も弱同値になり, $\mathbb{L}F(\gamma(f)) = \gamma(F(\tilde{f}))$ が同型になる. ここで $\mathbb{L}F$ が圏同値であるから, $\gamma(f)$ も同型である. したがって f は弱同値になる.

(ii) \Rightarrow (i): $(\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G, \tilde{\Phi})$ が随伴同値であることを示す. まず (b) より counit $\tilde{\varepsilon}_X$ が同型であることがわかるから, unit $\tilde{\eta}_A$ が同型であることを示せばよい. 随伴の三角等式より可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}F(A) & \xrightarrow{\mathbb{L}F(\tilde{\eta}_A)} & \mathbb{L}F \circ \mathbb{R}G \circ \mathbb{L}F(A) \\ & \searrow & \downarrow \tilde{\varepsilon}_{\mathbb{L}F(A)} \\ & & \mathbb{L}F(A) \end{array}$$

があるが, $\tilde{\varepsilon}_{\mathbb{L}F(A)}$ が同型だから $\mathbb{L}F(\tilde{\eta}_A)$ も同型となる. ここで $\tilde{\eta}_A = \gamma(f) \circ \gamma(w)^{-1}$ となる \mathcal{C} の射 f と弱同値 w が存在することに注意すると, $\mathbb{L}F(\tilde{\eta}_A) = \mathbb{L}F(\gamma(f)) \circ \mathbb{L}F(\gamma(w)^{-1})$ が同型であるということは $\mathbb{L}F(\gamma(f)) = \gamma(F(\tilde{f}))$ が同型であるということである. すると $F(\tilde{f})$ が弱同値になり, 仮定 (a) から \tilde{f} も弱同値で, 補題 2.37 より f も弱同値となる. よって $\gamma(f)$ が同型となるから, $\tilde{\eta}_A = \gamma(f) \circ \gamma(w)^{-1}$ も同型となる. したがって $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G$ は随伴同値である. \square

3 Cofibrantly generated なモデル圏

ここでは、良い生成条件を持つモデル圏である cofibrantly generated なモデル圏を扱う。実際に現れるモデル圏の多くは cofibrantly generated である。大きな特徴としてモデル圏の判定定理が存在し、モデル圏であることを証明するのが少し簡単になる。主に [MP12] を参考にした。

3.1 Weakly saturated class

以降、順序数や基数は順序関係を射と見なして自然に圏だと思う。

定義 3.1. 余完備な圏 \mathcal{C} と順序数 λ を考える。 \mathcal{C} における λ -列 (λ -sequence) とは、関手 $X: \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ であって、任意の極限順序数 $\beta < \lambda$ について誘導される射 $\operatorname{colim}_{\alpha < \beta} X(\alpha) \rightarrow X_\beta$ が同型であるときをいう。

定義 3.2. 余完備な圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{M} が超限合成で閉じる (*closed under transfinite composition*) とは、任意の順序数 λ と λ -列 $X: \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ に対して、0 でない各 $\alpha \in \lambda$ について射 $X(\alpha) \rightarrow X(\alpha+1)$ が \mathcal{M} に属するならば、自然な射 $X(0) \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha \in \lambda} X(\alpha)$ もまた \mathcal{M} に属するときをいう。

このとき、自然な射 $X(0) \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha \in \lambda} X(\alpha)$ を X の超限合成 (*transfinite composition*) といい。

定義 3.3. 余完備な圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{M} が弱飽和クラス (*weakly saturated class*) であるとは、次の条件をみたすときをいう：

- (1) \mathcal{M} は同型射を含む。
- (2) \mathcal{M} は pushout で閉じる。
- (3) \mathcal{M} は合成で閉じる。
- (4) \mathcal{M} は超限合成で閉じる。
- (5) \mathcal{M} は余積で閉じる。
- (6) \mathcal{M} は retract で閉じる。

射のクラス $S \subseteq \operatorname{mor}(\mathcal{C})$ に対し、 S を含む最小の weakly saturated class を S の弱飽和化 (*weak saturation*) といい、 \overline{S} と書く。

注意 3.4. 定義 3.3 で挙げた条件には、実は余分な条件もある。次の命題 3.5 で示すように、

- (1) と (3) は、(4) の特別な場合である
- (5) は、(2) と (4) から従う

ことがわかるので, weakly saturated class であることを見るには (2) と (4) と (6) の条件を確認すれば十分である.

命題 3.5. 余完備な圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{M} について,

- (i) \mathcal{M} が超限合成で閉じるならば, \mathcal{M} は同型射を含み, 合成で閉じる.
- (ii) \mathcal{M} が pushout と超限合成で閉じるならば, 余積を取る操作でも閉じる.

Proof. (i) 同型射が $\lambda = 0$ の場合の超限合成として表せること, 及び通常の合成射が $\lambda = 2$ の場合の超限合成であることから従う.

(ii) [Hir03, Prop. 10.2.7]. □

双対的に次も定義される.

定義 3.6. 完備な圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{N} が弱余飽和クラス (weakly cosaturated class) であるとは, \mathcal{N}^{op} が \mathcal{C}^{op} の weakly saturated class であるときをいう. すなわち次の条件をみたすときをいう:

- (1) \mathcal{N} は同型射を含む.
- (2) \mathcal{N} は pullback で閉じる.
- (3) \mathcal{N} は合成で閉じる.
- (4) \mathcal{N} は超限余合成 (超限合成の双対版) で閉じる.
- (5) \mathcal{N} は積で閉じる.
- (6) \mathcal{N} は retract で閉じる.

例 3.7. 集合の圏 Set において, 全射全体のなすクラスは weakly saturated で, これは $\{2 \rightarrow 1\}$ の weak saturation である. また単射全体のなすクラスも weakly saturated で, これは $\{\emptyset \rightarrow 1\}$ の weak saturation である.

命題 3.8. 圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{M} に対して, $\text{LLP}(\mathcal{M})$ は weakly saturated である. 双対的に $\text{RLP}(\mathcal{M})$ は weakly cosaturated である.

Proof. $\text{LLP}(\mathcal{M})$ が weakly saturated であることだけ示す. 命題 1.11, 1.12, 1.13, 1.14 において, $\text{LLP}(\mathcal{M})$ が合成と余積と pushout と retract で閉じることはすでに示した. 同型射を含むことも明らかである. よって $\text{LLP}(\mathcal{M})$ が超限合成で閉じることを示せばよいが, これも容易に示せる. □

3.2 The small object argument

与えられた圏がモデル圏であることを示す際、最も困難な部分は Factorization の公理 (MC4) の部分である。次の定理は、良い条件の下で分解可能性を保証する。[Rez22, §16] を参考にした。

定理 3.9 (The small object argument). 余完備な圏 \mathcal{C} の射の集合 S について、これらが (証明中に述べる) ある条件をみたすとする。このとき任意の射 $f: X \rightarrow Y$ は、 S の weak saturation \bar{S} の射 $j: X \rightarrow E$ と RLP(S) の射 $p: E \rightarrow Y$ を用いて $f = p \circ j$ と分解する。さらにこの分解は関手的分解になる。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow j & \nearrow p \\ & E & \end{array}$$

余完備な圏 \mathcal{C} とその射の集合 S が定理 3.9 の (証明中に述べる) ある条件をみたすとき、small object argument が成り立つ (*admit the small object argument*) と呼ぶことにする。

Proof. 射の集合 S を、 $S = \{s_i: A_i \rightarrow B_i\}_{i \in I}$ のように集合 I で添え字つけて表す。

(Step 1): まず射 $f: X \rightarrow Y$ に対して、分解

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow Lf & \nearrow Rf \\ & Ef & \end{array}$$

が以下のようにして構成できる。まず

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{u} & X \\ s_i \downarrow & & \downarrow f \\ B_i & \xrightarrow{v} & Y \end{array}, \quad s_i \in S$$

という形の可換図式全体の集合

$$[S, f] = \{(s_i, u, v) \mid s_i \in S, f \circ u = v \circ s_i\}$$

を考える。このとき $[S, f]$ に属する可換図式にわたって A_i, B_i の余積をとることで可換図式

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{(s_i, u, v)} A_i & \xrightarrow{(u)} & X \\ \coprod s_i \downarrow & & \downarrow f \\ \coprod_{(s_i, u, v)} B_i & \xrightarrow{(v)} & Y \end{array}$$

り, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{u} & E^\kappa f \\ s_i \downarrow & & \downarrow R^\kappa f \\ B_i & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

を考える. 条件より $u: A_i \rightarrow E^\kappa f$ は, ある $\alpha < \kappa$ が存在して

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \xrightarrow{u} & E^\kappa f & & \\ \downarrow s_i & \searrow^{u_\alpha} & E^\alpha f & \xrightarrow{R^\alpha f} & E^\kappa f \\ & & (*) & \searrow & \downarrow R^\kappa f \\ B_i & \xrightarrow{v} & Y & & \end{array}$$

と分解する. このとき $(*)$ の部分は $[S, R^\alpha f]$ に属する可換図式になるから, (Step 1) での構成から可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \xrightarrow{u_\alpha} & \coprod_{(s_i, u, v)} A_i & \xrightarrow{(u)} & E^\alpha f \\ \downarrow s_i & & \coprod \downarrow s_i & & \downarrow L(R^\alpha f) \\ B_i & \xrightarrow{v_\alpha} & \coprod_{(s_i, u, v)} B_i & \xrightarrow{v} & E^{\alpha+1} f \\ & & & & \downarrow R^{\alpha+1} f \\ & & & & Y \end{array}$$

が得られる. 合成射 $B_i \rightarrow \coprod_{(s_i, u, v)} B_i \rightarrow E^{\alpha+1} f$ を v_α と表せば,

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \xrightarrow{u} & E^\kappa f & & \\ \downarrow s_i & \searrow^{u_\alpha} & E^{\alpha+1} f & \xrightarrow{R^{\alpha+1} f} & E^\kappa f \\ & & \downarrow L(R^\alpha f) & & \downarrow R^\kappa f \\ B_i & \xrightarrow{v_\alpha} & E^{\alpha+1} f & \xrightarrow{R^{\alpha+1} f} & Y \\ & & & & \downarrow R^\kappa f \end{array}$$

が可換となり, リフト $B_i \xrightarrow{v_\alpha} E^{\alpha+1} f \rightarrow E^\kappa f$ が存在することがわかる. よって $R^\kappa f$ は s_i に対して右リフト性を持ち, $R^\kappa f \in \text{RLP}(S)$ であることが従う. したがって $j = L^\kappa f, p = R^\kappa f$ とすることで主張が得られる.

(分解の関手性): (Step 1) の分解 $f \mapsto (X \xrightarrow{L^f} E^f \xrightarrow{R^f} Y)$ が関手的であることから, 分解 $f \mapsto (X \xrightarrow{L^\alpha f} E^\alpha f \xrightarrow{R^\alpha f} Y)$ も関手的であることがわかる. \square

系 3.10. 余完備な圏 \mathcal{C} とその射の集合 S に対して small object argument が成り立つとき, $\overline{S} = \text{LLP}(\text{RLP}(S))$ が成り立つ. 特に $\text{RLP}(\overline{S}) = \text{RLP}(S)$ となる.

Proof. 命題 3.8 より $\text{LLP}(\text{RLP}(S))$ は weakly saturated であるから, $\overline{S} \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(S))$ がわかる. $\text{LLP}(\text{RLP}(S))$ の射 $f: X \rightarrow Y$ を取るとき, 定理 3.9 より \overline{S} の射 $j: X \rightarrow E$ と $\text{RLP}(S)$ の

射 $p: E \rightarrow Y$ を用いて $f = p \circ j$ と分解する. すると補題 1.10 より f は j の retract となり, \bar{S} が retract で閉じることから $f \in \bar{S}$ となる.

特に $\text{RLP}(\bar{S}) = \text{RLP}(\text{LLP}(\text{RLP}(S))) = \text{RLP}(S)$ となる. \square

3.3 Cofibrantly generated model category

どのような圏であれば small object argument (定理 3.9) が利用できるかを考えよう. その一つが cofibrantly generated なモデル圏である. [MP12, Ch. 15] を参考にした.

まず CW 複体の定義を一般化した relative cell complex を導入する.

定義 3.11. 余完備な圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{I} に対して, **相対 \mathcal{I} -胞体 λ -複体** (relative \mathcal{I} -cell λ -complex) とは, \mathcal{I} の射の余積の pushout の超限合成として表せる射のことをいう. すなわち, \mathcal{C} における λ -sequence $X: \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ の超限合成 $X_0 \rightarrow \text{colim}_{\alpha \in \lambda} X_\alpha$ であって, 各後続順序数 $\alpha + 1 < \lambda$ において射 $X_\alpha \rightarrow X_{\alpha+1}$ が \mathcal{I} に属する射の族 $\{s_i: A_i \rightarrow B_i\}_{i \in S_\alpha}$ と pushout

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in S_\alpha} A_i & \longrightarrow & X_\alpha \\ \Pi s_i \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i \in S_\alpha} B_i & \longrightarrow & X_{\alpha+1} \end{array}$$

になっているようなものをいう. 各添え字集合 S_α が一元集合であり, \mathcal{I} の射の pushout の超限合成として表せる相対 \mathcal{I} -胞体複体は, **単純** (simple) であるという.

特に相対 \mathcal{I} -胞体 ω -複体のことを, **列的相対 \mathcal{I} -胞体複体** (sequential relative \mathcal{I} -cell complex) という. ここで ω は最小の無限順序数を表す.

相対 \mathcal{I} -胞体複体である射全体のなすクラスを $\text{Cell}(\mathcal{I})$ と書く.

注意 3.12. 射の集合 S と順序数 κ に対して, 定理 3.9 の small object argument で超限帰納的に構成した射の列

$$X \xrightarrow{L_f} Ef \xrightarrow{LR_f} E^2f \xrightarrow{LR^2_f} E^3f \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^\alpha f \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^\kappa f$$

は定義 3.11 の条件をみたす κ -sequence だから, その超限合成は relative S -cell κ -complex である.

注意 3.13. 定義 3.11 は [MP12, Def. 15.1.1] によるものである. 普通は [Hov99, Def. 2.1.9] や [Hir03, Def. 10.5.8] のように simple なものを relative cell complex と呼ぶことが多い. ここでは small object argument との関連がわかりやすいように上述のように定義した. 実際にはすべての relative cell complex は, simple なものとして表せる ([Hov99, Lem. 2.1.13]).

命題 3.14. 余完備な圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{I} に対して,

- (i) $\text{Cell}(\mathcal{I}) \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(\mathcal{I}))$ が成り立つ.
- (ii) $\text{Cell}(\mathcal{I})$ は超限合成で閉じる.

Proof. (i) $\mathcal{I} \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(\mathcal{I}))$ であることと, 命題 3.8 より $\text{LLP}(\text{RLP}(\mathcal{I}))$ が余積と pushout と超限合成で閉じることから, relative \mathcal{I} -cell complex の定義によりわかる.

(ii) [Hov99, Lem. 2.1.12] □

定義 3.15. 余完備な圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{I} と基数 κ を考える. 対象 $A \in \mathcal{C}$ が κ -small with respect to $\text{Cell}(\mathcal{I})$ であるとは, 任意の順序数 $\lambda \geq \kappa$ と relative \mathcal{I} -cell λ -complex $f: X_0 \rightarrow \text{colim}_{\alpha \in \lambda} X_\alpha$ に対して, 誘導される写像

$$\rho: \text{colim}_{\alpha \in \lambda} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X_\alpha) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{colim}_{\alpha \in \lambda} X_\alpha)$$

が全単射であるときをいう.

対象 $A \in \mathcal{C}$ が $\text{Cell}(\mathcal{I})$ に関して κ -small になるような基数 κ が存在するとき, A は small with respect to $\text{Cell}(\mathcal{I})$ という.

命題 3.16. 余完備な圏 \mathcal{C} の射の集合 S に対して, S に族する任意の射の domain が small with respect to $\text{Cell}(S)$ であるとする. このとき, S について small object argument が成り立つ.

Proof. S は集合であるから, 十分大きな基数 κ を取ることによって S に族する任意の射の domain が κ -small with respect to $\text{Cell}(S)$ であるとしてよい. すると S に属する任意の射 $s_i: A_i \rightarrow B_i$ と任意の relative \mathcal{I} -cell κ -complex $f: X_0 \rightarrow \text{colim}_{\alpha \in \kappa} X_\alpha$ に対して, 誘導される写像

$$\rho: \text{colim}_{\alpha \in \kappa} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X_\alpha) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{colim}_{\alpha \in \kappa} X_\alpha)$$

は全単射である. このことを定理 3.9 の small object argument で超限帰納的に構成した κ -sequence

$$X \xrightarrow{L_f} Ef \xrightarrow{LR_f} E^2f \xrightarrow{LR^2_f} E^3f \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^\alpha f \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^\kappa f$$

に対して適応すれば, ρ の全射性によって S が定理 3.9 の (証明中に述べた) ある条件 をみたすことがわかる. □

系 3.17. 余完備な圏 \mathcal{C} の射の集合 S に対して, S に族する任意の射の domain が small with respect to $\text{Cell}(S)$ であるとする. このとき, $\text{LLP}(\text{RLP}(I))$ の射は $\text{Cell}(I)$ の射の retract になる.

Proof. 定理 3.9 の証明は, 実際には任意の射を $\text{Cell}(I)$ と $\text{RLP}(I)$ の射に分解している. よって補題 1.10 により, すべての $\text{LLP}(\text{RLP}(I))$ の射は $\text{Cell}(I)$ の射の retract になる. □

この命題により、属する射の domain がすべて small with respect to $\text{Cell}(S)$ であるような射の集合 S について、small object argument による射の分解が可能となる。この性質を利用して、モデル圏構造が射の集合から生成されているようなモデル圏を次のように定義する。

定義 3.18. (完備かつ) 余完備なモデル圏 \mathcal{C} が cofibrantly generated であるとは、射の集合 $I, J \subseteq \text{mor}(\mathcal{C})$ が存在して、

- (1) I に属する任意の射の domain は small with respect to $\text{Cell}(I)$ である
- (2) J に属する任意の射の domain は small with respect to $\text{Cell}(J)$ である
- (3) $\text{Fib} = \text{RLP}(J)$
- (4) $\text{Fib} \cap \mathcal{W} = \text{RLP}(I)$

をみたすときをいう。このとき I を *generating cofibration* の集合、 J を *generating acyclic cofibration* の集合と呼ぶ。上の条件がみたされるとき組 (\mathcal{C}, I, J) が cofibrantly generated なモデル圏 (*cofibrantly generated model category*) であると呼ぶ。

命題 3.19. Cofibrantly generated なモデル圏 (\mathcal{C}, I, J) について、次が成り立つ。

- (i) $\text{Cof} = \text{LLP}(\text{RLP}(I))$
- (ii) すべての cofibration は、relative I -cell complex の retract である
- (iii) I の weak saturation は Cof に等しい： $\bar{I} = \text{Cof}$
- (iv) $\text{Cof} \cap \mathcal{W} = \text{LLP}(\text{RLP}(J))$
- (v) すべての acyclic cofibration は、relative J -cell complex の retract である
- (vi) J の weak saturation は $\text{Cof} \cap \mathcal{W}$ に等しい： $\bar{J} = \text{Cof} \cap \mathcal{W}$

Proof. (i): 命題 2.10 より $\text{Cof} = \text{LLP}(\text{Fib}) = \text{LLP}(\text{RLP}(I))$ となる。(ii): 系 3.17 と (i) より従う。(iii): (i) と系 3.10, もしくは (ii) より従う。

(iv)–(vi) も同様である。 □

命題 3.20. Cofibrantly generated なモデル圏 (\mathcal{C}, I, J) は関手的分解を持つ。

Proof. 射の集合 I, J に対して、定理 3.9 の関手的な分解を考えればよい。 □

この命題で構成される関手的分解は、モデル圏がもともと持っている分解とは必ずしも一致するとは限らない。

一般にモデル圏構造を確認することは大変であるが、次の定理はその負担をいくらか軽減してくれる。実際にはこの定理の仮定をみたす集合 I, J をうまく見つけて、cofibrantly generated なモデル圏であることを証明することがほとんどであるが。この定理の主張は [Hov99, Thm. 2.1.19] による。

定理 3.21. 完備かつ余完備な圏 \mathcal{C} , 射の集合 I, J , 恒等射を含む射のクラス \mathcal{W} を考える. このとき次は同値である.

- (1) 圏 \mathcal{C} は, I を generating cofibration の集合, J を generating acyclic cofibration の集合, \mathcal{W} を弱同値のクラスとするような cofibrantly generated なモデル圏になる.
- (2) 次が成り立つ:
 - (a) \mathcal{W} は (2-out-of-3) をみたし, retract で閉じる
 - (b) I に属する射の domain は small with respect to $\text{Cell}(I)$ である
 - (c) J に属する射の domain は small with respect to $\text{Cell}(J)$ である
 - (d) $\text{Cell}(J) \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(I)) \cap \mathcal{W}$
 - (e) $\text{RLP}(I) \subseteq \text{RLP}(J) \cap \mathcal{W}$
 - (f) $\text{LLP}(\text{RLP}(I)) \cap \mathcal{W} \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(J))$ もしくは $\text{RLP}(J) \cap \mathcal{W} \subseteq \text{RLP}(I)$ のいずれかが成り立つ.

Proof. (1) \Rightarrow (2): (a), (b), (c) は明らか. 命題 3.14 と命題 3.19 より, $\text{Cell}(J) \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(J)) = \text{Cof} \cap \mathcal{W} = \text{LLP}(\text{RLP}(I)) \cap \mathcal{W}$ となるから (d) がいえる. また定義より $\text{RLP}(I) = \text{Fib} \cap \mathcal{W} = \text{RLP}(J) \cap \mathcal{W}$ となるので (e) と (f) も成り立つ.

(2) \Rightarrow (1): 条件をみたす射の集合 I, J に対して, $\text{Cof} := \text{LLP}(\text{RLP}(I))$, $\text{Fib} := \text{RLP}(J)$ とおく. このとき射のクラスの三組 $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib})$ が定義 2.1 をみたすことを確認する. まず仮定と命題 3.8 より (MC1) と (MC2) は明らかである.

次に (MC4) を確認したい. 仮定 (d) より $\text{Cell}(J) \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(I)) \cap \mathcal{W} = \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ であるが, 今 $\text{Cof} \cap \mathcal{W}$ は retract で閉じるから系 3.17 より $\bar{J} = \text{LLP}(\text{RLP}(J)) \subseteq \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ となる. よって, J に関する small object argument によって任意の射は $\text{Cof} \cap \mathcal{W}$ の射と Fib の射の合成として分解できることがわかる. また, $\bar{I} \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(I))$ かつ, (e) より $\text{RLP}(I) \subseteq \text{RLP}(J) \cap \mathcal{W} = \text{Fib} \cap \mathcal{W}$ であるから, I に関する small object argument によって任意の射は Cof の射と $\text{Fib} \cap \mathcal{W}$ の射の合成として分解できることがわかる.

最後に (MC3) を確認する. $\text{LLP}(\text{RLP}(I)) \cap \mathcal{W} \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(J))$ が成り立つと仮定しよう. つまり $\text{Cof} \cap \mathcal{W} \subseteq \text{LLP}(\text{Fib})$ であり, このことからまず $\text{Cof} \cap \mathcal{W}$ が Fib に関して左リフト性を持つことがわかる. 次に任意に $p \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$ を取るとき, p が Cof に関して右リフト性を持つ, つまり $p \in \text{RLP}(\text{Cof}) = \text{RLP}(I)$ であることを示したい. I に関する small object argument により, p は $i \in \bar{I} = \text{Cof}$ と $q \in \text{RLP}(I) \subseteq \text{RLP}(J) \cap \mathcal{W}$ を用いて $p = q \circ i$ と分解できる. ここで $p, q \in \mathcal{W}$ であるので (a) より $i \in \mathcal{W}$ であり, $i \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ となる. 特に i は p に関して左リフト性を持ち, したがって補題 1.10 より p は $q \in \text{RLP}(I)$ の retract になるから, $p \in \text{RLP}(I)$ がわかる. $\text{RLP}(J) \cap \mathcal{W} \subseteq \text{RLP}(I)$ が成り立つ場合も同様にして証明できる. \square

すでにわかっている cofibrantly generated なモデル圏の構造を利用して, モデル圏構造を導入することもよく行われる.

定理 3.22. (\mathcal{C}, I, J) を cofibrantly generated なモデル圏, \mathcal{D} を完備かつ余完備な圏, $\langle F \dashv G \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を随伴とする. \mathcal{D} の射の集合 $FI := \{F(u) \mid u \in I\}$ と $FJ := \{F(v) \mid v \in J\}$ について,

- (α) FI に属する射の domain は small with respect to $\text{Cell}(FI)$ である
- (β) FJ に属する射の domain は small with respect to $\text{Cell}(FJ)$ である
- (γ) G は relative FJ -cell complex を弱同値にうつす

をみたすとする. \mathcal{D} の射のクラス \mathcal{W}' を $\mathcal{W}' := \{g \mid G(g) \in \mathcal{W}\}$ と定める. このとき

- (i) \mathcal{D} は, \mathcal{W}' を弱同値のクラス, FI を generating cofibration の集合, FJ を generating acyclic cofibration の集合として持つような cofibrantly generated なモデル圏になる.
- (ii) さらに, 随伴 $\langle F \dashv G \rangle$ は Quillen 随伴になる.

Proof. (i) 射のクラス \mathcal{W}' と集合 FI, FJ について定理 3.21 の条件が成り立つことを確認する. まず (a) について, 関手は恒等射と合成と retract を保つことから, \mathcal{W}' が恒等射を含み, (2-out-of-3) をみたし, retract で閉じることはわかる. (b) と (c) は, 仮定 (α) と (β) そのままである. $\text{RLP}(I) = \text{Fib} \cap \mathcal{W} = \text{RLP}(J) \cap \mathcal{W}$ であることに注意すると, 補題 2.59 と \mathcal{W}' の定義により $\text{RLP}(FI) = \text{RLP}(FJ) \cap \mathcal{W}'$ であることがわかり, (e) と (f) も成り立つ. また $\text{RLP}(I) = \text{Fib} \cap \mathcal{W} \subseteq \text{Fib} = \text{RLP}(J)$ に注意すると, 再び補題 2.59 により $\text{RLP}(FI) \subseteq \text{RLP}(FJ)$ がわかる. よって命題 3.14 より $\text{Cell}(FJ) \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(FJ)) \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(FI))$ となる. 仮定 (γ) から $\text{Cell}(FJ) \subseteq \mathcal{W}'$ であるので, $\text{Cell}(FJ) \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(FI)) \cap \mathcal{W}'$ となり (d) も成り立つ.

(ii) 左随伴 F は余極限を保つから, relative I -cell complex を relative FI -cell complex にうつす. F は retract も保つから, 命題 3.19 により F が cofibration を保つことがわかる. 同様に acyclic cofibration を保つこともわかる. \square

命題 3.23. (\mathcal{C}, I, J) を cofibrantly generated なモデル圏, \mathcal{D} をモデル圏, $\langle F \dashv G \rangle: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を随伴とする. このとき,

$$\langle F \dashv G \rangle \text{ が Quillen 随伴 } \iff FI \subseteq \text{Cof}(\mathcal{D}) \text{ かつ } FJ \subseteq \text{Cof} \cap \mathcal{W}(\mathcal{D})$$

である.

Proof. (\Rightarrow) は明らか. (\Leftarrow): 補題 2.59 より, $F(\text{LLP}(\text{RLP}(I))) \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(FI))$ であることが確認できる. 今 $FI \subseteq \text{Cof}(\mathcal{D})$ だから $\text{LLP}(\text{RLP}(FI)) \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(\text{Cof}(\mathcal{D}))) = \text{Cof}(\mathcal{D})$ となる. $\text{Cof}(\mathcal{C}) = \text{LLP}(\text{RLP}(I))$ に注意すれば, $F(\text{Cof}(\mathcal{C})) = F(\text{LLP}(\text{RLP}(I))) \subseteq \text{LLP}(\text{RLP}(FI))$ であることがわかり, F は cofibration を保つ. 同様にして F が acyclic cofibration を保つこともわかり, 随伴 $\langle F \dashv G \rangle$ は Quillen 随伴である. \square

3.4 Combinatorial model category

[Lur09, §A.2.6]

4 モデル圏再考

4.1 モデル圏構造再考

弱分解系を用いたモデル圏構造の同値な言い換えを紹介する。主に [Rie09] を参考にした。

定義 4.1. 圏 \mathcal{C} の射のクラス \mathcal{L}, \mathcal{R} の組 $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ が弱分解系 (*weak factorization system*) であるとは,

- 圏 \mathcal{C} の任意の射 f は, \mathcal{R} の射 r と \mathcal{L} の射 l を用いて $f = r \circ l$ と表せる
- $\mathcal{L} = \text{LLP}(\mathcal{R})$ かつ $\mathcal{R} = \text{RLP}(\mathcal{L})$ が成り立つ

をみたすときをいう。

$(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ が弱分解系であるとき, 命題 3.8 より \mathcal{L} は weakly saturated で, \mathcal{R} は weakly cosaturated である。

次のように, small object argument は与えられた射の集合から弱分解系を得る手続きだと思えることができる。

命題 4.2. 余完備な圏 \mathcal{C} とその射の集合 S に対して small object argument が成り立つとき, $(\bar{S}, \text{RLP}(S))$ は弱分解系である。

Proof. 定理 3.9 と系 3.10 より従う。 □

モデル圏の定義は, 次のように弱分解系を用いて表現することが可能である。

定理 4.3. 有限完備かつ有限余完備な圏 \mathcal{C} の射のクラス $\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib}$ に対して, 次は同値である。

- 組 $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib})$ が \mathcal{C} 上のモデル圏構造を定める。
- 組 $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib})$ が次をみたす:
 - \mathcal{W} は (2-out-of-3) をみたす。
 - $(\text{Cof} \cap \mathcal{W}, \text{Fib})$ と $(\text{Cof}, \text{Fib} \cap \mathcal{W})$ は弱分解系である。

Proof. (i) \Rightarrow (ii): (MC1) より \mathcal{W} は (2-out-of-3) をみたし, (MC4) と命題 2.10 より $(\text{Cof} \cap \mathcal{W}, \text{Fib})$ と $(\text{Cof}, \text{Fib} \cap \mathcal{W})$ は弱分解系である。

(ii) \Rightarrow (i): (a) より (MC1), (b) より (MC3) と (MC4) は明らか。 $\text{Cof}, \text{Cof} \cap \mathcal{W}, \text{Fib}, \text{Fib} \cap \mathcal{W}$ が retract で閉じることも (b) と命題 1.14 よりわかる。

したがって \mathcal{W} が retract で閉じることを示せばよい。射 $f \in \text{mor}(\mathcal{C})$ が $w \in \mathcal{W}$ の retract であ

る, すなわち可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_A & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 A & \xrightarrow{a} & X & \longrightarrow & A \\
 f \downarrow & & \downarrow w & & \downarrow f \\
 B & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & B \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\
 & & \text{id}_B & &
 \end{array}$$

が存在するとする.

まず $f \in \text{Fib}$ である場合を考える. $(\text{Cof} \cap \mathcal{W}, \text{Fib})$ が弱分解系であることから, w に対して

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{w} & Y \\
 u \searrow & & \nearrow v \\
 & Z &
 \end{array}$$

が可換となる $u \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ と $v \in \text{Fib}$ が存在する. $w, u \in \mathcal{W}$ だから (a) より $v \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$ となる. $s := u \circ a$ と置き, $u \square f$ であることから得られるリフトを $t: Z \rightarrow A$ とすると, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_A & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 A & \xrightarrow{a} & X & \longrightarrow & A \\
 f \downarrow & \searrow s & \downarrow u & \nearrow t & \downarrow f \\
 & & Z & & \\
 & & \downarrow v & & \\
 B & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & B \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\
 & & \text{id}_B & &
 \end{array}$$

が得られる. このとき f は $v \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$ の retract となるから $f \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$, 特に $f \in \mathcal{W}$ であることがわかる.

次に一般の射 f に対して考える. $(\text{Cof} \cap \mathcal{W}, \text{Fib})$ が弱分解系であることから, f に対して

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 g \searrow & & \nearrow h \\
 & C &
 \end{array}$$

が可換となる $g \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ と $h \in \text{Fib}$ が存在する. a と g の pushout を D とすると, 普遍性によって

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_A & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 A & \xrightarrow{a} & X & \longrightarrow & A \\
 g \downarrow & \nearrow \ulcorner & \downarrow c & & \downarrow g \\
 C & \xrightarrow{x} & D & \xrightarrow{w} & C \\
 h \downarrow & & \downarrow d & & \downarrow h \\
 B & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & B \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\
 & & \text{id}_B & &
 \end{array}$$

なる d が誘導される. $g \in \text{Cof} \cap \mathcal{W} = \text{LLP}(\text{Fib})$ より $c \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ であり, よって $w, c \in \mathcal{W}$ であるから (a) より $d \in \mathcal{W}$ がわかる. 一方で

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_A & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 A & \xrightarrow{a} & X & \longrightarrow & A \\
 g \downarrow & & \downarrow c & & \downarrow g \\
 C & \xrightarrow{x} & D & \dashrightarrow^y & C \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\
 & & \text{id}_C & &
 \end{array}$$

なる y をとれば, 普遍性によって

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_C & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 C & \xrightarrow{x} & D & \xrightarrow{y} & C \\
 h \downarrow & & \downarrow d & & \downarrow h \\
 B & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & B \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\
 & & \text{id}_B & &
 \end{array}$$

が可換となるから, $h \in \text{Fib}$ は $d \in \mathcal{W}$ の retract となる. よって前半の議論より $h \in \mathcal{W}$ であることがわかる. $g \in \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ であるから, (a) より $f = h \circ g \in \mathcal{W}$ がわかる. \square

4.2 モデル圏構造の一意性

系 2.14 において, モデル圏に入っているモデル圏構造は弱同値・cofibration・fibration のいずれか二つがわかれば決定できることを見た. 次の命題によって, さらに少ない情報から決定することもできる.

命題 4.4 ([Joy08, Prop. E.1.10], [Joy, “Model categories”]). 有限完備かつ有限余完備な圏 \mathcal{C} 上のモデル圏構造は, cofibration のクラスと fibrant 対象のクラスから一意に決定される. すなわち \mathcal{C} 上の二つのモデル圏構造 $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib})$, $(\mathcal{W}', \text{Cof}', \text{Fib}')$ があるとき, $\text{Cof} = \text{Cof}'$ かつ $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}'_f$ ならば, $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$ かつ $\text{Fib} = \text{Fib}'$ が成り立つ. ここで $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}'_f$ はそれぞれモデル圏構造 $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib})$, $(\mathcal{W}', \text{Cof}', \text{Fib}')$ に関する fibrant な対象のなす \mathcal{C} の充満部分圏を表す.

双対的に, 有限完備かつ有限余完備な圏 \mathcal{C} 上のモデル圏構造は, fibration のクラスと cofibrant 対象のクラスから一意に決定される.

Proof. まず $\text{Cof} = \text{Cof}'$ であるから, $\text{Fib} \cap \mathcal{W} = \mathcal{W}' \cap \text{Fib}'$ であり, それぞれのモデル圏構造に関する cofibrant 対象のクラスは一致している.

命題 2.10 より, $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$ が示されれば $\text{Fib} = \text{Fib}'$ であることもわかる. また補題 2.37 より cofibrant resolution を取って考えれば, $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}_c = \mathcal{W}' \cap \mathcal{C}_c$ であることが示されれば $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$ であることもわかる. 今は $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}'_c$ であることに注意する.

射 $f: A \rightarrow B$ で $A, B \in \mathcal{C}$ が cofibrant 対象であるようなものを考える．まずモデル圏構造 $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib})$ で考察する．弱同値 \mathcal{W} に関する局所化を $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$ とすると，命題 2.44 より

$$f \in \mathcal{W} \text{ である } \iff \gamma(f) \text{ は } \text{Ho}\mathcal{C} \text{ の同型射である}$$

が成り立つ．米田の補題により $\gamma(f)$ が $\text{Ho}\mathcal{C}$ の同型射であることは自然変換

$$-\circ\gamma(f): \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(B, -) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(A, -)$$

が自然同型であることと同値である．局所化 $\text{Ho}\mathcal{C}$ の任意の対象は cofibrant かつ fibrant な対象と同型であるから

$\gamma(f)$ は $\text{Ho}\mathcal{C}$ の同型射

$$\iff \text{任意の } X \in \mathcal{C}_{cf} \text{ に対して } -\circ\gamma(f): \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(B, X) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(A, X) \text{ は全単射}$$

となる．定義 2.42 より $\text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{C}}(A, X) = \pi(RA, X)$ であるから，これは

$$\text{任意の } X \in \mathcal{C}_{cf} \text{ に対して } -\circ Rf: \pi(RB, X) \rightarrow \pi(RA, X) \text{ は全単射}$$

ということである．ここで Rf の代表元を \bar{f} とすると，これは

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ r_A \downarrow \wr & & r_B \downarrow \wr \\ RA & \xrightarrow{\bar{f}} & RB \end{array}$$

を可換にする射である．これより cofibrant かつ fibrant な対象 $X \in \mathcal{C}_{cf}$ に対して可換図式

$$\begin{array}{ccc} \pi(A, X) & \xleftarrow{-\circ f} & \pi(B, X) \\ -\circ r_A \uparrow & & \uparrow -\circ r_B \\ \pi(RA, X) & \xleftarrow{-\circ Rf} & \pi(RB, X) \end{array}$$

が得られる．補題 2.30 より左右の縦の射は全単射であるから，上下の射の全単射性は同値である．以上より

$$f \in \mathcal{W} \iff \text{任意の } X \in \mathcal{C}_{cf} \text{ に対して } -\circ f: \pi(B, X) \rightarrow \pi(A, X) \text{ は全単射}$$

であることがわかる．同様にモデル圏構造 $(\mathcal{W}', \text{Cof}', \text{Fib}')$ で考えれば

$$f \in \mathcal{W}' \iff \text{任意の } X \in \mathcal{C}_{cf} \text{ に対して } -\circ f: \pi'(B, X) \rightarrow \pi'(A, X) \text{ は全単射}$$

となる．しかし $\pi(A, X) = \pi^\ell(A, X)$ であり，left homotopy ℓ の定義には弱分解系 $(\text{Cof}, \text{Fib} \cap \mathcal{W})$ しか用いていないことから， $\pi(A, X) = \pi'(A, X)$ であることがわかる．したがって $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}_c = \mathcal{W}' \cap \mathcal{C}_c$ が示せた． \square

注意 4.5. まとめて、モデル圏構造は次のデータから一意に決定される：

- 弱同値と cofibration.
- 弱同値と fibration.
- cofibration と fibration.
- acyclic cofibration と acyclic fibration.
- cofibration と fibrant 対象.
- fibration と cofibrant 対象.

5 モデル圏の例

モデル圏は一般の圏においてホモトピー論を行うための枠組みである。しかし、同じ圏でも入るモデル圏構造は一意ではない。たとえば、例 2.7 で見たように、弱同値を同型射, cofibration と fibration をすべての射として選ぶと、どんな圏もモデル圏になる (自明なモデル圏構造)。重要なのは、扱いたい状況に合わせて適切なモデル圏構造を見つけることである。そしてしばしば、そのことが一番難しい。

本章ではモデル圏の例を紹介する。[Bal21] や [数学の犬, 『モデル圏の例』] においても多くの例が紹介されているので参照されたい。

例 5.1. 次はモデル圏である。

(i) 位相空間の圏 \mathbf{Top} 上には次のようなモデル圏構造が存在する。これを \mathbf{Top} 上の Quillen モデル圏構造と呼び、このモデル圏を $\mathbf{Top}_{\text{Quillen}}$ と書くことにする。

- 弱同値を弱ホモトピー同値写像 (ホモトピー群の同型を誘導する)
- ファイブレーションを Serre ファイブレーション
- コファイブレーションを相対胞複体の包含射のレトラクト

このモデル圏は cofibrantly generated である。

(ii) 位相空間の圏 \mathbf{Top} 上には次のようなモデル圏構造が存在する。これを \mathbf{Top} 上の Strøm モデル圏構造と呼び、このモデル圏を $\mathbf{Top}_{\text{Strøm}}$ と書くことにする。

- 弱同値をホモトピー同値写像
- ファイブレーションを Hurewicz ファイブレーション
- コファイブレーションを閉コファイブレーション

このモデル圏においてすべての位相空間は fibrant かつ cofibrant である。

(iii) 単体的集合の圏 \mathbf{sSet} 上には次のようなモデル圏構造が存在する。これを \mathbf{sSet} 上の Kan-Quillen モデル圏構造と呼び、このモデル圏を $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ と書くことにする。

- 弱同値を幾何学的実現をとってホモトピー同値写像
- ファイブレーションを Kan ファイブレーション
- コファイブレーションを各次元で単射となる射

このモデル圏においてすべての単体的集合は cofibrant であり, fibrant な対象はちょうど Kan 複体に一致する。このモデル圏は

$$I := \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n \mid n \geq 0\}, \quad J := \{\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n \mid n \geq 0, 0 \leq i \leq n\}$$

をそれぞれ generating cofibration の集合, generating acyclic cofibration の集合とするような cofibrantly generated なモデル圏になる。

(iv) 単体的集合の圏 \mathbf{sSet} 上には次のようなモデル圏構造が存在する。これを \mathbf{sSet} 上の Joyal モデル圏構造と呼び、このモデル圏を $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ と書くことにする。

- 弱同値を categorical equivalence
- ファイブレーションを categorical fibration
- コファイブレーションを単射

このモデル圏においてすべての単体的集合は cofibrant であり, fibrant な対象はちょうど quasi-category に一致する. このモデル圏は

$$I := \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n \mid n \geq 0\},$$

を generating cofibration の集合とするような cofibrantly generated なモデル圏になる. generating acyclic cofibration の集合の明示的な表示は知られていない.

(v) R をフロベニウス環としたとき, R -加群の圏 $\text{Mod}(R)$ 上には, 次のようなモデル圏構造が存在する. このモデル圏を $\text{Mod}(R)_{\text{Frob}}$ と書くことにする.

- 弱同値を安定同値写像
- ファイブレーションを全射
- コファイブレーションを単射

(vi) 可換環 k 上の加群の複体の圏 $\text{Ch}(k)$ 上には, 次のようなモデル圏構造が存在する. これを $\text{Ch}(k)$ 上の射影的モデル圏構造と呼び, このモデル圏を $\text{Ch}(k)_{\text{proj}}$ と書くことにする.

- 弱同値を擬同型写像 (ホモロジー群の同型を誘導する)
- ファイブレーションを全射
- コファイブレーションを cofibrant な余核を持つ単射

このモデル圏は

$$I := \{S_k^n \hookrightarrow D_k^n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad J := \{0 \hookrightarrow D_k^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

をそれぞれ generating cofibration の集合, generating acyclic cofibration の集合とするような cofibrantly generated なモデル圏になる. さらに次が成り立つ.

- $\text{Fib} = \text{RLP}(J) = \text{Surj}$
- $\text{Fib} \cap \mathcal{W} = \text{RLP}(I) = \text{Surj} \cap \text{Qism}$
- $\text{Cof} = \text{LLP}(\text{RLP}(I)) = \text{LLP}(\text{Surj}) = \{\text{cofibrant な余核を持つ単射}\}$
- $\text{Cof} \cap \mathcal{W} = \text{LLP}(\text{RLP}(J)) = \text{LLP}(\text{Surj} \cap \text{Qism}) = \{\text{射影的な余核を持つ単射}\}$
- すべての複体は fibrant である.
- 複体が cofibrant ならば, 複体の各項は射影加群になる.
- 複体が射影的であることと, cofibrant かつ acyclic であることは同値である.

証明は [ペ 21] を参照のこと.

(vii) 可換環 k 上の加群の複体の圏 $\text{Ch}(k)$ 上には, 次のようなモデル圏構造が存在する. これを $\text{Ch}(k)$ 上の入射的モデル圏構造と呼び, このモデル圏を $\text{Ch}(k)_{\text{inj}}$ と書くことにする.

- 弱同値を擬同型写像 (ホモロジー群の同型を誘導する)
- ファイブレーションを fibrant な核を持つ全射
- コファイブレーションを単射

例 5.2. 単体的集合の幾何学的実現を得る関手 Goem および位相空間の特異単体を得る関手 Sing のなす随伴 $\text{Goem} \dashv \text{Sing}$ は, sSet 上の Kan-Quillen モデル圏構造と Top 上の Quillen モデル圏構造との間の Quillen 同値

$$\text{Goem} : \text{sSet}_{\text{Kan}} \rightleftarrows \text{Top}_{\text{Quillen}} : \text{Sing}$$

を与える.

例 5.3. 次はモデル圏である.

(i) 小圏の圏 Cat 上には, 次のようなモデル圏構造が存在する. これを Cat 上の canonical モデル圏構造と呼び, このモデル圏を Cat_{can} と書くことにする.

- 弱同値を圏同値
- ファイブレーションを isofibration
- コファイブレーションを対象間で単射となる関手

このモデル圏は cofibrantly generated であり, すべての圏は cofibrant かつ fibrant である. Cat 上のモデル圏構造で圏同値を弱同値とするものはこの canonical モデル圏構造に限ることが知られている.

(ii) 可換環 k 上の dg 小圏の圏 dgCat_k 上には, 次のようなモデル圏構造が存在する.

- 弱同値を擬同値 (quasi-fully faithful かつ quasi-essentially surjective)
- ファイブレーションを quasi-fibration (locally fibration かつ isofibration)

このモデル圏は cofibrantly generated であり, すべての dg 圏は fibrant である.

(iii) 単体的小圏の圏 Cat_Δ 上には, 次のようなモデル圏構造が存在する. これを Cat_Δ 上の Bergner モデル圏構造と呼び, このモデル圏を $\text{Cat}_{\Delta, \text{Bergner}}$ と書くことにする.

- 弱同値を Dwyer-Kan 同値
- ファイブレーションを quasi-fibration (locally fibration かつ isofibration)

このモデル圏は cofibrantly generated であり, fibrant 対象はちょうど Hom 複体が Kan 複体になっている単体的圏である.

(iv) より一般に, 良いモノイダルモデル圏 \mathcal{V} 上の豊穡圏の圏 $\mathcal{V}\text{-Cat}$ 上には, 次のようなモデル圏構造が存在する. これを $\mathcal{V}\text{-Cat}$ 上の Bergner モデル圏構造と呼び, このモデル圏を $\mathcal{V}\text{-Cat}_{\text{Bergner}}$ と書くことにする.

- 弱同値を Dwyer-Kan 同値
- ファイブレーションを quasi-fibration (locally fibration かつ isofibration)

例 5.4. 単体的集合の rigidification を得る関手 \mathfrak{C} および単体的圏の homotopy coherent nerve を得る関手 N_{hc} のなす随伴 $\mathfrak{C} \dashv N_{\text{hc}}$ は, sSet 上の Joyal モデル圏構造と Cat_Δ 上の Bergner モデル圏構造との間の Quillen 同値

$$\mathfrak{C} : \text{sSet}_{\text{Joyal}} \rightleftarrows \text{Cat}_{\Delta, \text{Bergner}} : N_{\text{hc}}$$

■ を与える.

例 5.5. 集合の圏 \mathbf{Set} 上のモデル圏構造は, 次の九つに限られる ([BA]).

- (i) $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib}) = (\text{any}, \text{bij}, \text{any})$
- (ii) $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib}) = (\text{any}, \text{surj}, \text{inj})$
- (iii) $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib}) = (\text{any}, \text{inj}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}, \text{surj} \cup \text{inj}_{\emptyset})$
- (iv) $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib}) = (\text{any}, \text{any}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}, \text{bij} \cup \text{inj}_{\emptyset})$
- (v) $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib}) = (\text{any}, \text{inj}, \text{surj})$
- (vi) $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib}) = (\text{any}, \text{any}, \text{bij})$
- (vii) $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib}) = (\text{any}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}, \text{inj}, \text{surj} \cup \text{inj}_{\emptyset})$
- (viii) $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib}) = (\text{any}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}, \text{any}, \text{bij} \cup \text{inj}_{\emptyset})$
- (ix) $(\mathcal{W}, \text{Cof}, \text{Fib}) = (\text{bij}, \text{any}, \text{any})$

参考文献

- [Bal21] Scott Balchin. *A handbook of model categories*. Vol. 27. Algebra and Applications. Springer, Cham, 2021. DOI: [10.1007/978-3-030-75035-0](https://doi.org/10.1007/978-3-030-75035-0). (Cit. on pp. 3, 61.)
- [BA] Tobias Barthel and Omar Antolin-Camarena. *The nine model category structures on the category of sets*. URL: <https://www.matem.unam.mx/~omar/notes/modelcatsets.html>. (Cit. on p. 64.)
- [DS95] W. G. Dwyer and J. Spaliński. “Homotopy theories and model categories”. In: *Handbook of algebraic topology*. North-Holland, Amsterdam, 1995, pp. 73–126. DOI: [10.1016/B978-044481779-2/50003-1](https://doi.org/10.1016/B978-044481779-2/50003-1). URL: <https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT9580/v18/documents/dwyer-spalinski-homotopy-theories-and-model-categories-handbook-alg-top-1995.pdf>. (Cit. on pp. 3, 12, 15.)
- [GS07] Paul Goerss and Kristen Schemmerhorn. “Model categories and simplicial methods”. In: *Interactions between homotopy theory and algebra*. Vol. 436. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 3–49. DOI: [10.1090/conm/436/08403](https://doi.org/10.1090/conm/436/08403). (Cit. on p. 3.)
- [Hir03] Philip S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*. Vol. 99. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. DOI: [10.1090/surv/099](https://doi.org/10.1090/surv/099). URL: <https://web.math.rochester.edu/people/faculty/doug/otherpapers/pshmain.pdf>. (Cit. on pp. 3, 46, 50.)

- [Hov99] Mark Hovey. *Model categories*. Vol. 63. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. URL: <https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/otherpapers/hovey-model-cats.pdf>. (Cit. on pp. 3, 5, 12, 37, 50–52.)
- [Hov15] Mark Hovey. *Errata to Model Categories*. 2015. URL: <https://hopf.math.purdue.edu/Hovey/model-err.pdf>. (Cit. on p. 5.)
- [Joy08] André Joyal. *The theory of quasi-categories and its applications*. 2008. URL: <https://mat.uab.cat/~kock/crm/hocat/advanced-course/Quadern45-2.pdf>. (Cit. on p. 58.)
- [Joy] André Joyal. *Joyal’s CatLab*. URL: <https://ncatlab.org/joyalcatlab/published/HomePage>. (Cit. on p. 58.)
- [Lur09] Jacob Lurie. *Higher topos theory*. Vol. 170. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. DOI: 10.1515/9781400830558. URL: <http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/highertopoi.pdf>. (Cit. on pp. 3, 55.)
- [MP12] J. P. May and Kate Ponto. *More concise algebraic topology. Localization, completion, and model categories*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2012. (Cit. on pp. 3, 45, 50.)
- [Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967. (Cit. on p. 3.)
- [Rez22] Charles Rezk. *Introduction to quasicategories*. 2022. URL: <https://faculty.math.illinois.edu/~rezk/quasicats.pdf>. (Cit. on p. 47.)
- [Rie09] Emily Riehl. *A concise definition of a model category*. 2009. URL: <https://math.jhu.edu/~eriehl/modelcat.pdf>. (Cit. on p. 56.)
- [ペ 21] ペーパー (@paper3510mm). 加群の複体の圏上のモデル圏構造. ver. 2021 年 12 月 6 日. URL: https://paper3510mm.github.io/pdf/chain_cpx.pdf. (Cit. on p. 62.)
- [数学の犬] 数学の犬. モデル圏. URL: https://sites.google.com/site/mathdogs1121/model_category. (Cit. on p. 61.)