Pointless Topology 概説 *

@paper3510mm†

2019 年 12 月 1 日

pointless topology とは，その名の通り “点のない” 位相空間論のことです．通常の位相空間は，集合とその部分集合族 (位相) の組であって，位相についていくつかの条件を満たすものです．この位相が満たす代数的条件を取り出すことにより得られる代数を frame (あるいは locale) と呼び，これを “位相空間” と見なして位相空間論を展開するのが pointless topology という分野です．点のない位相空間論を展開するに先立って，この理論が通常の位相空間論とどの程度重なっているのか，位相のなす代数がどの程度もとの空間を復元できるかと考えるのは，自然なことだと思います．この検証の過程には，点の集まりとして空間があるのでなく，空間が先に与えられそれから点が定まるという逆の発想があり，本稿を通じて「“点” とは何か」という問いに対する pointless topology 的回答を紹介できればと思います (紹介してないかもしれない).

本格的に pointless topology の内容に入るまでの基礎となる部分までを概説しました．文献などは最終節などを参照してください．

目次

* S2S 春セミナー 2018 での発表「Pointless Topology 概説」の講義ノートであり，以前 Twitter にあげた pdf の ver.2 です．C95 頒布 “B.PROJECT vol.1” に寄稿した記事でもあります

† Twitter: https://twitter.com/paper3510mm

1　イントロダクション ー pointless topology とは

位相空間とは，集合 X とその部分集合族 $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ の組 $(X, \mathcal{O}_X)$ であって，

- $\emptyset, X \in \mathcal{O}_X$
- $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_X \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_X$
- $U_\lambda \in \mathcal{O}_X (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcup U_\lambda \in \mathcal{O}_X$

をみたすもののことであった．

この条件は代数的な視点からみると

“$\mathcal{O}_X$ は有限個の $\cap$ と任意個の $\cup$ で閉じる”

ということであり，$\mathcal{O}_X$ はある種の代数構造をもつことがわかる．このような代数はフレームと呼ばれ，標語的に言えば

フレーム = “2 つの演算 $\wedge, \vee$ があって，有限の $\wedge$ と任意の $\vee$ で閉じる代数”

である．

位相空間 X の，位相空間としての情報が全てその開集合系 $\mathcal{O}_X$ に含まれるのは納得されると思うが，それは開集合系だけをみれば空間をみていることになるということであり，この考えを延長すれば，開集合系の代数的対応物たるフレームをみることによって “位相空間” を取り扱うことができるのではないかという発想に行きつく．これこそが pointless topology である．すなわち，開集合系のみたす代数構造によって位相空間論を展開するのである．

フレームとは開集合系のことであるから，フレーム F の元 a は位相空間の開集合に対応する．

$$
\begin{array}{cccl}
\mathcal{O}_X & \longleftrightarrow & F & : \text{frame} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\
U & \overset{\text{対応}}{\Longleftrightarrow} & a & \\
X & & 1 & (\max)
\end{array}
$$

特に，開集合としての台集合 X は，F の “最大元”1 に対応する．pointless と称するのは，X が要素の集まりからなる集合であるのに対して 1 は内部構造をもたず，フレームを与えたとき対応する空間に点がない (pointless) ように考えられることによる．

さてこのように考えたとき素朴には次のような疑問が生じるであろう．

代数 $\mathcal{O}_X$ は，空間 X のどれだけの情報を持っているか？
$\rightarrow$ $\mathcal{O}_X$ から X を復元できるか？
$\rightarrow$ フレームから位相空間をどのように構成するか？
$\rightarrow$ 空間の点をどうするか？ (フレームの点概念)

答えをいえば，一般にはフレームから元の空間を完全には復元できない ($\mathsf{Top} \neq \mathsf{Frm}^{\mathrm{op}}$) が，ある種親密な関係 ($\mathsf{Top}$ と Frm の間の随伴) が存在することがわかる．この事実を紹介するのが本稿の目的である．

2　束論から

フレームを定義する前に束論の基本事項を確認する．

順序集合 (partially ordered set) のことを poset ともいう．順序集合の間の写像が順序を保つとき monotone であるともいう．

定義 2.1. 順序集合 P が束 (lattice) であるとは，すべての有限部分集合が上限 (sup, join) と下限 (inf, meet) をもつときをいう (このとき，有限 sup と有限 inf をもつともいう)．有限部分集合 $S \subseteq P$ の sup, inf を $\vee S, \wedge S$ とかく．$S = \{a, b\}$ のときは，$\vee S = a \vee b, \wedge S = a \wedge b$ とかく．特に，空集合 $\emptyset \subseteq P$ の sup, inf として，最小元 $0 := \vee\emptyset$, 最大元 $1 := \wedge\emptyset$ をもつ．

束準同型 (lattice homomorphism) とは，束から束への順序を保つ写像であって，任意の有限部分集合の sup と inf を保つもののこと (有限 sup と有限 inf を保つという).

定義 2.2. 束が完備 (complete) であるとは，すべての (有限とは限らない) 部分集合が上限と下限をもつときをいう (すべての sup とすべての inf をもつという).

定義 2.3. $f \colon P \to Q, g \colon Q \to P$ を順序集合の間の monotone な写像とする．f と g が Galois 随伴 (随伴，Galois 接続) であるとは，

$$\forall x \in P, \forall y \in Q, \quad f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y)$$

をみたすときをいう．このとき $f \dashv g$ とかき，

f は，g の左随伴 (left adjoint) である (右随伴 g をもつ)
g は，f の右随伴 (right adjoint) である (左随伴 f をもつ)

という．f に対してその右随伴 g は，存在すれば一意である．

例えば，集合の間の写像 $f \colon X \to Y$ に対し，direct image function $f[-] \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ と inverse image function $f^{-1}[-] \colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ を考える．包含関係による順序集合 $\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)$ の間の monotone な写像とみれば，

$$\forall A \subseteq X, \forall B \subseteq Y, \quad f(A) \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq f^{-1}(B)$$

であるから，これらは随伴 $f[-] \dashv f^{-1}[-]$ をなす．

定理 2.4. 順序集合 P, Q と monotone 写像 $f \colon P \to Q, g \colon Q \to P$ が Galois 随伴 $f \dashv g$ をなすとき，左随伴 f はすべての sup を保ち，右随伴 g はすべての inf を保つ．ここで f がすべての sup を保つとは，sup が存在する任意の部分集合 $M \subseteq P$ に対し，$f(M) \subseteq Q$ の sup も存在し $f(\vee M) = \vee f(M)$ が成り立つことをいう．g がすべての inf を保つことも同様.

証明. 部分集合 $M \subseteq P$ に対して $s = \vee M$ が存在するとする．f は monotone だから $f(s)$ は

$f(M) \subseteq Q$ の上界である．$y \in Q$ も $f(M)$ の上界とすると，各 $m \in M$ に対して，$f(m) \le y$ であり随伴 $f \dashv g$ より $m \le g(y)$ も成立．よって $g(y)$ は M の上界だから，s の最小性より $s \le g(y)$ となり，再び随伴 $f \dashv g$ より $f(s) \le y$ が成り立つ．したがって $f(s)$ は $f(M)$ の上限となり $f(s) = \vee f(M)$，つまり f は sup を保つ．g も同様． ■

次の定理は，準同型が随伴をもつかどうかの判定条件を与える．

定理 2.5. P, Q が完備束で，f, g が monotone な写像であるとき，

(i) f は右随伴 f_* をもつ ⇔ f はすべての sup を保つ

(ii) g は左随伴 g^* をもつ ⇔ g はすべての inf を保つ

証明. (i) を示す．⇒ は定理 2.4 で示した．⇐ を示す．monotone 写像 $f\colon P \to Q$ が sup を保つとする．写像 $f^*\colon Q \to P$ を $y \in Q$ に対し

$$f^*(y) = \vee\{x \in P \mid f(x) \le y\}$$

によって定める．このとき f^* は monotone であり，$f(x) \le y$ ならば $x \le f^*(y)$ が成立する．逆に $x \le f^*(y)$ とすると，f は sup を保つので

$$\begin{aligned} f(x) \le f(f^*(y)) &= f(\vee\{x' \in P \mid f(x') \le y\}) \\ &= \vee\{f(x') \in P \mid f(x') \le y\} \le y \end{aligned}$$

となる．したがって $f \dashv f^*$ である．(ii) も同様． ■

3 フレーム

位相の代数構造を取り出したものが frame である．

observation. 開集合系の集合 $\mathcal{O}_X$ は次のような条件を持つ．

- $(\mathcal{O}_X, \subseteq)$ は lattice
- 最小元 $\emptyset \in \mathcal{O}_X$ と最大元 $X \in \mathcal{O}_X$ が存在
- 任意の部分集合 $\{U_i\} \subseteq \mathcal{O}_X$ に対して上限 $\cup U_i \in \mathcal{O}_X$ と下限 $\mathrm{int}(\cap U_i) \in \mathcal{O}_X$ が存在
- 分配的である：$(\cap U_i) \cap V = \cap(U_i \cap V)$

定義 3.1. フレーム (frame) とは，完備束 L であって分配律：

$$(\vee_i a_i) \wedge b = \vee_i (a_i \wedge b)$$

をみたすもの．

フレーム準同型 (frame homomorphism) とは，束準同型であってすべての sup を保つもの．

フレームとフレーム準同型のなす圏を Frm とかく．

X を位相空間とすると，その位相 $\mathcal{O}_X$ は明らかに frame である．位相空間に対して，その位相のなす frame を対応させることによって，Top から Frm への (反変) 関手が得られる：

$$
\begin{tikzcd}
\Omega\colon \mathsf{Top} \arrow[r] & \mathsf{Frm}^{\mathrm{op}} & & \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\
(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{O}_X & \ni & f^{-1}(U) \\
{} \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & {} & & \\
(Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, mapsto] & \mathcal{O}_Y \arrow[uu, "{f^{-1}[-]}"'] & \ni & U \arrow[uu, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

$f^{-1}[-]$ は $\mathcal{O}_Y$ の sup を保つが $\mathcal{O}_Y$ の inf は保たないことに注意.

開集合系から元の空間が復元できるか？という問題意識のもと，今度は Frm から Top への (反変) 関手を手に入れたい．この際，問題となるのは，frame から構成する空間の点をどのように考えればよいかということである．

そのために，位相空間 X の点が frame $\mathcal{O}_X$ の中で何に対応しうるかを考えてみる．点の情報をもつデータの一つとして，点 $x \in X$ の開近傍系 $\mathcal{U}_X(x)$ が考えられる．

observation. 開近傍系 $\mathcal{U}_X(x)$ は次の性質をみたす：

- $\emptyset \notin \mathcal{U}_X(x), X \in \mathcal{U}_X(x)$
- $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_X(x) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_X(x)$
- $U_1 \in \mathcal{U}_X(x), U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_2 \in \mathcal{U}_X(x)$
- $\cup U_i \in \mathcal{U}_X(x) \Rightarrow \exists i, U_i \in \mathcal{U}_X(x)$

> **定義 3.2.** frame L に対して，$F \subseteq L$ が L の完備素フィルター (completely prime filter, 以後 c.p.filter とかく) であるとは，
>
> 1. $0 \notin F, F \neq \emptyset$
> 2. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$
> 3. $a \in F, a \leq b \Rightarrow b \in F$
> 4. $\vee a_i \in F \Rightarrow \exists i, a_i \in F$
>
> をみたすもののこと．

もちろん，点 x の開近傍系 $\mathcal{U}_X(x)$ は frame $\mathcal{O}_X$ の c.p.filter である．これを空間の点として採用しよう．

frame L に対して，この “点” を集めて

$$\mathrm{pt}(L) = \{L \text{ の c.p.filter 全体 }\}$$

とし，この上に

$$\Sigma_L(a) = \{F \subseteq L : \text{c.p.filter} \mid a \in F\} \quad (a \in L)$$

を開集合とする位相 $\{\Sigma_L(a) \mid a \in L\}$ を定めて，位相空間とする[*1]．さらに frame 準同型 $f\colon L \to M$ に対して

$$\mathrm{pt}(f)\colon\ \mathrm{pt}(M) \to \mathrm{pt}(L), \quad \mathrm{pt}(f)[F] = f^{-1}[F]$$

とすればこれは well-defined でかつ連続であり[*2]，これらの対応は関手

$$\mathrm{pt}\colon \mathsf{Frm} \longrightarrow \mathsf{Top}^{\mathrm{op}}$$

を定める．

位相空間 X はその位相の代数から完全には復元されない．すなわち，$\mathrm{pt} \circ \Omega(X) \cong X$ は一般には成立しない．しかし，これらの関手は Top と Frm の間の反変随伴を与える．

各 frame L に対して，frame 準同型

$$\Sigma_L\colon L \to \Omega(\mathrm{pt}(L)), \quad a \mapsto \Sigma_L(a)$$

を考えれば，族 $(\Sigma_L)_{L \in \mathsf{Frm}}$ は自然性をもち，自然変換

$$\Sigma\colon\ \mathrm{Id}_{\mathsf{Frm}} \Longrightarrow \Omega \circ \mathrm{pt}$$

が得られる．

一方，各位相空間 X に対して，連続写像

$$\mathcal{U}_X\colon X \to \mathrm{pt}(\Omega(X)), \quad x \mapsto \mathcal{U}_X(x)$$

を考えれば，族 $(\mathcal{U}_X)_{X \in \mathsf{Top}}$ は自然性をもち，自然変換

$$\mathcal{U}\colon\ \mathrm{Id}_{\mathsf{Top}} \Longrightarrow \mathrm{pt} \circ \Omega$$

を与える．

これら $\mathcal{U}, \Sigma$ を unit, counit として，Ω と pt は反変随伴

$$\Omega \dashv \mathrm{pt}\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Frm}^{\mathrm{op}}$$

をなすことがわかる．これで広義の双対性が得られた．これらは適切な制限のもと反変圏同値を誘導する．

4　位相空間の一般化としてのロケール

Top と Frm の間に反変随伴が存在することはわかったが，反変では矢印の向きが逆になるので扱いづらい．何とか共変なものがほしい．そこで，$\mathscr{C} \cong \mathsf{Frm}^{\mathrm{op}}$ となる圏 $\mathscr{C}$ を構成すれば，上でつくった反変随伴は Top と $\mathscr{C}$ の間の共変随伴となろう．この圏 $\mathscr{C}$ を Loc と表しロケールの圏 (category

[*1] $\Sigma_L(1) = \mathrm{pt}(L)$，$\Sigma_L(0) = \emptyset$．$\Sigma_L(a) \cap \Sigma_L(b) = \Sigma_L(a \wedge b)$．$\cup_i \Sigma_L(a_i) = \Sigma_L(\vee_i a_i)$．よって $\mathrm{pt}(L)$ は位相空間．

[*2] F が M の c.p.filter であることと f が frame 準同型であることから $f^{-1}[F]$ は L の c.p.filter とわかり $\mathrm{pt}(f)$ は well-defined．$\mathrm{pt}(f)^{-1}(\Sigma_L(a)) = \Sigma_M(f(a))$ より $\mathrm{pt}(f)$ は連続．

of locales) という．Loc の対象をロケール (locale) と呼び，これを位相空間の一般化 (代替物) みなす (6 節参照).

Loc を構成しよう．Loc は Frm の反対圏として実現されることを期待している．対象は同一のものとするのが良いだろう．

定義 4.1. 圏 Loc の対象は frame である．frame を Loc の対象とみるとき locale と呼ぶ.

Loc の射としては何を選べば良いだろうか．Loc は Frm の反対圏であり，その射はフレーム準同型を形式的に逆向きにしたものである．圏論的な議論をする上ではこれでよいが，ロケールによる位相空間論を展開するには，具体的にどのようなものか与えておく方が良い.

observation. フレーム準同型 $f\colon M \to L$ はすべての sup を保つことから，定理 2.5 より右 Galois 随伴 $f_*\colon L \to M$ を唯一つもつ (フレーム準同型の逆向きの射！).

定義 4.2. locale(つまり frame) L と M の間の，圏 Loc の射とは，順序を保つ写像 $h\colon L \to M$ であって，h はすべての inf を保ち (i.e. h は左随伴を持ち)，左 Galois 随伴 $h^*\colon M \to L$ が有限 inf を保つ (i.e. h^* が frame 準同型になる) もののこと．これを localic map と呼ぶ.

Loc は，locale を対象とし，localic map を射とする圏である．左右の Galois 随伴は一対一に対応するので，確かに $\mathsf{Loc} \cong \mathsf{Frm}^{\mathrm{op}}$ である．先に構成した反変関手を適当に修正して，Top と Loc の間の共変随伴ができる.

例えば，$\Omega\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Frm}^{\mathrm{op}}$ を修正すると，次のようになる.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lc}\colon \mathsf{Top} & \longrightarrow & \mathsf{Loc} \\ \Psi & & \Psi \\ X & \longmapsto & \Omega(X) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \longmapsto & \downarrow{\scriptstyle \Omega(f)_*} \\ Y & \longmapsto & \Omega(Y) \end{array}$$

ここで $\Omega(f)_*$ は $\Omega(f)$ の右随伴である．任意の $A \in \Omega(X)$ と $B \in \Omega(Y)$ に対して

$$\Omega(f)(B) = f^{-1}[B] \subseteq A \Leftrightarrow B \subseteq \mathrm{int}(Y \setminus f[X \setminus A]) = Y \setminus \overline{f[X \setminus A]}$$

であるから，$U \in \Omega(X)$ に対して

$$\mathrm{Lc}(f)(U) = \Omega(f)_*(U) = Y \setminus \overline{f[X \setminus U]}$$

と書けることがわかる．$x \in X$ に対し，

$$\widetilde{x} := X \setminus \overline{\{x\}} \in \Omega(X) = \mathrm{Lc}(X)$$

と置けば

$$\mathrm{Lc}(f)(\widetilde{x}) = Y \setminus \overline{f[X \setminus \widetilde{x}]} = Y \setminus \overline{f(\overline{\{x\}})} = Y \setminus \overline{\{f(x)\}} = \widetilde{f(x)}$$

となり，点の移動としての空間の間の写像っぽさが垣間見える.

5 ロケールの点概念

逆向きの関手を作る前に，ロケールの点概念について触れておく．
ある種のフィルターが点と思えることは frame のときに述べた．

定義 5.1. locale L の点とは

(P1) 完備素フィルター $F \subseteq L$

のこと．

一方，通常の位相空間 X の点 $x \in X$ は，圏論的には離散位相を入れた singleton$\{*\}$ から X への連続写像 $\{*\} \xrightarrow{x} X$ と思え，対応する frame hom は

$$\Omega(x)\colon \Omega(X) \to \Omega(\{*\}) = \{\emptyset, \{*\}\} =: 2$$

である (2 は最大元 $1 = \{*\}$ と最小元 $0 = \emptyset$ からなる frame を表す)．このことから，

定義 5.2. locale L の点とは

(P2) frame hom $L \to 2$ あるいは localic map $2 \to L$

のこと．

さらに，前節で $f\colon X \to Y$ in Top に対して，$\mathrm{Lc}(f)(\widetilde{x}) = \widetilde{f(x)}$ となることをみた．$\widetilde{x} = X \setminus \overline{\{x\}}$ は写像がうつす空間の点のような振る舞いをし，X の開集合 U, V に対し

$$U \cap V \subseteq X \setminus \overline{\{x\}} \Rightarrow U \subseteq X \setminus \overline{\{x\}} \text{ or } V \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$$

をみたすことがわかる．

定義 5.3. frame L の元 $p \neq 1$ について，p が meet-irreducible であるとは

$$\forall a, b \in L, \quad a \wedge b \leq p \Rightarrow a \leq p \text{ or } b \leq p$$

をみたすことをいう．

定義 5.4. locale L の点とは

(P3) meet-irreducible な元 $p \in L$

のこと．

4 節の最後で観察したことは，次のように述べることができる．

命題 **5.5.** localic map は，(P3) の意味で点を保つ．

三つの点概念は，次のように一対一に対応する：

$$
\begin{array}{ccc}
\text{(c.p.filter)} & \longleftrightarrow & (\text{frame hom } L \to 2) \\
\text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\
F & \longmapsto & h_F : L \to 2; h_F(x) = 1 \text{ iff } x \in F \\
F_h = \{x \mid h(x) = 1\} & \longleftarrow\!\shortmid & h : L \to 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\text{(c.p.filter)} & \longleftrightarrow & \text{(meet-irreducible element)} \\
\text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\
F & \longmapsto & p_F = \bigvee\{x \mid x \notin F\} \\
F_p = \{x \mid x \nleq p\} & \longleftarrow\!\shortmid & p
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
(\text{localic map } 2 \to L) & \longleftrightarrow & \text{(meet-irreducible element)} \\
\text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\
f & \longmapsto & p_f = f(0) \\
f_p : 2 \to L; f(0) = p, f(1) = 1 & \longleftarrow\!\shortmid & p
\end{array}
$$

よってどの点概念を採用しても良いことがわかる[*3]．

6 Top と Loc の随伴と双対性

ロケールでの随伴を与えておく．

関手 Loc → Top は pt と同じようにして作れる．L を locale とする．$a \in L$ に対し

$$\Sigma_L(a) = \{F \subseteq L : \text{c.p.filter} \mid a \in F\}$$

とすると，$\{\Sigma_L(a) \mid a \in L\}$ は開集合の公理を満たすことがわかる．このとき位相空間

$$\mathrm{Sp}(L) = (\{\text{all c.p.filter in } L\}, \{\Sigma_L(a) \mid a \in L\})$$

を L の spectrum という．

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sp}\colon \mathsf{Loc} & \longrightarrow & \mathsf{Top} \\
\text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\
L & \longmapsto & \mathrm{Sp}(L) \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sp}(f)} \\
M & \longmapsto & \mathrm{Sp}(M)
\end{array}
\qquad \text{where } \mathrm{Sp}(f)(F) := (f^*)^{-1}(F)
$$

とすれば，$\mathrm{Sp}(f)$ は well-defined かつ連続となり，Sp は関手をなす (spectrum functor という)．

[*3] 点とは，何も集合の要素に限らない．台となる集合に構造をのせたような空間からみれば，点は台集合の元であるが，先に構造を与えて空間をなすとき，点は構造の部分であったり，構造間の写像であったり，構造の特別な要素であったりするのである．

注意. meet-irreducible element を点として採用しても良い．このときは関手 Sp はいくぶん簡潔になる：

$$\begin{aligned}
\Sigma'_L(a) &= \{p \in L : \text{meet-irr.} \mid a \not\leq p\} \\
\mathrm{Sp}'(L) &= (\{\text{all meet-irr. elements in } L\}, \{\Sigma'_L(a) \mid a \in L\}) \\
\mathrm{Sp}'(f)&\colon \mathrm{Sp}'(L) \to \mathrm{Sp}'(M), \quad q \mapsto f(q)
\end{aligned}$$

この場合，$\mathrm{Sp}'(f)$ は空間の点の移動そのものであることがわかる．

Lc と Sp は次のように随伴をなす．$L \in \mathsf{Loc}$ に対し

$$\begin{array}{rcl}
\phi_L\colon L & \longrightarrow & \mathrm{Lc}(\mathrm{Sp}(L)) \ : \text{surjective frame hom.} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
a & \longmapsto & \Sigma_L(a)
\end{array}$$

が定まるから，その右 Galois 随伴を

$$\sigma_L = (\phi_L)_*\colon \mathrm{Lc}(\mathrm{Sp}(L)) \to L : \text{localic map}$$

とする．すると族 $(\sigma_L)_{L \in \mathsf{Loc}}$ は，自然変換 $\sigma\colon \mathrm{Lc} \circ \mathrm{Sp} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{Loc}}$ をなす．

一方，$X \in \mathsf{Top}$ に対し

$$\begin{array}{rcl}
\lambda_X\colon X & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(\mathrm{Lc}(X)) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
x & \longmapsto & \lambda_X(x) \qquad := \mathcal{U}(x) = \{U \in \mathcal{O}_X \mid x \in U\}
\end{array}$$

を考えると，λ_X は連続であることがわかる．族 $(\lambda_X)_{X \in \mathsf{Top}}$ は，自然変換 $\lambda\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{Top}} \Rightarrow \mathrm{Sp} \circ \mathrm{Lc}$ をなす．

> **定理 6.1.** 関手 Lc と Sp は，λ, σ を unit, counit にもつ随伴 $\mathrm{Lc} \dashv \mathrm{Sp}$ を与える．

つまりいい感じの関係がある．

一般論として，随伴を適切に制限すれば，圏同値が得られる．どこまで制限するかは，unit, counit が同型となるようなクラスまでである．

> **定義 6.2.** locale L が空間的 (spatial) であるとは，ある $X \in \mathsf{Top}$ が存在してフレームの同型 $L \cong \Omega(X)$ が成り立つときをいう．

> **命題 6.3.** locale L に対し次は同値：
>
> (i) L : spatial
>
> (ii) $\sigma_L\colon \mathrm{Lc}(\mathrm{Sp}(L)) \to L$ は frame iso.

定義 6.4. 位相空間 X が sober であるとは，frame $\mathcal{O}_X$ が $\mathcal{U}_X(x)$ という形以外に c.p.filter をもたないときをいう．

命題 6.5. locale L に対し，$\mathrm{Sp}(L)$ は sober space である．

命題 6.6. 位相空間 X に対し次は同値：

(i) X : sober
(ii) $\lambda_X \colon X \to \mathrm{Sp}(\mathrm{Lc}(X))$ は homeo.

そこで，

$$\textsf{SpaLoc} \text{ を spatial locale のなす } \textsf{Loc} \text{ の full subcategory}$$
$$\textsf{SobTop} \text{ を sober top. space のなす } \textsf{Top} \text{ の full subcategory}$$

とすると

$$\forall L \in \textsf{SpaLoc}, \quad \sigma_L \colon \mathrm{Lc} \circ \mathrm{Sp}(L) \xrightarrow{\cong} L$$
$$\forall X \in \textsf{SobTop}, \quad \lambda_X \colon X \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sp} \circ \mathrm{Lc}(X)$$

となり

$$\mathrm{Lc} \circ \mathrm{Sp} \cong \mathrm{Id}_{\textsf{SpaLoc}}, \quad \mathrm{Id}_{\textsf{SobTop}} \cong \mathrm{Sp} \circ \mathrm{Lc}$$
$$\therefore \textsf{SobTop} \simeq \textsf{SpaLoc} \hookrightarrow \textsf{Loc}$$

とわかる．

興味深い位相空間はたいてい sober なので，実用的には locale はちゃんと “一般化された位相空間” だとみなせることがわかる．Loc へは，この圏同値を通じて，様々な位相空間論のアイデアが輸入されることになる．

7 pointless topology の展開

位相空間論の諸概念は，locale の言葉で様々に翻訳される．

例えば，位相空間のコンパクト性は，locale において次のように定義できる．

定義 7.1. locale L の被覆 (cover) とは，部分集合 $A \subseteq L$ であって $\vee A = 1$ をみたすもののこと．L の被覆 A の部分被覆 (subcover) とは，その部分集合 $B \subseteq A$ であって $\vee B = 1$ をみたすもののこと．

locale L がコンパクトであるとは，任意の被覆が有限部分被覆を持つときをいう．

位相空間のコンパクト性はもともと開集合を用いて定義されていたので，locale での表記は簡単である．一般に開集合で書き表せる性質はそのまま locale へ輸入される．

問題は，開集合で書き表せない性質，特に空間の点をとって定義されるものを，いかに locale の世界に持ち込むか，となる．例えば位相空間の Hausdorff 性は，空間の任意の異なる二点が開集合で分離されるというものであり，locale で考えたとき空間の点をとるという操作はできず，このままではうまく定義できない．ではどうするかというと，Hausdorff 性と同値な条件に注目して，そこから “Hausdorff locale” を定めることとなる．

observation. 位相空間 X が Hausdorff であることは，直積空間 $X \times X$ においてその対角集合 $\{(x,x) \mid x \in X\}$ が閉集合であることと同値である．

> **定義 7.2.** locale L が I-Hausdorff (Isbell-Hausdorff, 強 Hausdorff) であるとは，“diagonal map”$\Delta : L \to L \oplus L$ が “closed localic map” であるときをいう．

つまり Hausdorff 性をうまく圏論的に表現し直して locale に翻訳するのである．ここで，“Hausdorff locale” を定めるためには，“diagonal map” や “closed localic map” とは何か，また積 “$L \oplus L$” は存在するのか，などを調べる必要はある．諸概念を定めるために必要な，圏 Loc の性質を調べていくのが，この記事の内容に続く pointless topology の展開のひとつである ([PiPu11]).

位相空間とロケールは何が違うか*4．例えば，直積は一般的にロケールでのほうが大きくなる．John Isbell によれば*5，このような違いは実際にひとつの特徴として現れ，localic product は topological product よりもいい振る舞いをするという．Tychonoff の定理は compact (regular) locale に対しても成立するが，その証明には選択公理を必要としない．Stone-Čech コンパクト化やほかの定理のいくつかについても同様のことが言える．locale はどんな topos のなかでも定式化でき，これは選択公理のないようなどんな mathematical setting においても位相空間論を展開することができるということを意味する．こうしたことは，localic product が構成的にかけることに起因し，このような構成的な手続きが pointless topology の嬉しい特徴のひとつである．最近の結果では，locale theory を使えば，locale の構造の入れた $\mathbb{R}^n$ 上にすべての部分集合が可測となる等長不変測度が存在することが分かっている*6．これは通常の位相では不可能なことである．

8 あとがき・参考文献

この pdf の構成については，[Leh15] を参考にした．pointless topology に興味を持って，深く学びたい人は，歴史的大著 [Joh86] か，あるいは現代的な [PiPu11] がおすすめ．和書だと [田中 00] の後半がこの分野の入門書となっている．[Joh83] や [Joh91] は創始者 Johnstone によるサーベイ記事であり，手短に知りたいときは役に立つと思う．topos の理論で locale がどう使われているかは [SGL] に詳しい．

*4 [Leh15] の introduction より．

*5 Isbell, J. R. (1972). Atomless Parts of Spaces. *Mathematica Scandinavica*, 31, 5-32. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-11409.

*6 Alex Simpson. Measure, randomness and sublocales. *Annals of Pure and Applied Logic*, 163(11):1642-1659, 2012. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168007211001874

参考文献

[Joh86] Peter T Johnstone. *Stone Spaces*. Cambridge University Press, 1986.

[Joh91] Peter T Johnstone. *The Art of Pointless Thinking: A Student's Guide to the Category of Locales*, In: Category Theory at Work (H. Herrlich and H.-E. Porst Eds), Reaserch and Exposition in Math. **18** Heldermann Verlag, (1991), 85-107.

[Joh83] Peter T Johnston, et al. The point of pointless topology. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 8(1):41–53, 1983.

[PiPu11] Jorge Picado and Aleš Pultr. *Frames and Locales: Topology without points*. Frontiers in Mathematics, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012.

[Leh15] Georg Lehner. *Pointless Topology*. 2015. http://aurora.asc.tuwien.ac.at/~funkana/downloads_general/sem_lehner.pdf.

[SGL] S. MacLane and I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic. A First Introduction to Topos Theory.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[田中 00] 田中俊一,『位相と論理』, 日本評論社, 2000.