# Spectral 空間と分配束の Stone 双対性 *

@paper3510mm†

2019 年 12 月 7 日

**概要**

Stone 双対性といえば，ブール代数とストーン空間の間のものがよく知られていますが，実はより広く (有界な) 分配束に対しても双対性は存在します．分配束に対応する位相空間は spectral 空間と呼ばれ，本稿ではその定義と諸性質を述べた後，分配束の圏と spectral 空間の圏との間に双対性が成り立つことを紹介します．本稿は spectral 空間論のノートを兼ねます．

## 目次



---

* Math Advent Calender 2019 (https://adventar.org/calendars/4297)，7 日目の記事です．
† Twitter: https://twitter.com/paper3510mm

## Convention

- 集合 $X$ に対して，そのべき集合を $\mathcal{P}(X)$ で表す．集合 $X$ の部分集合族 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して，$\emptyset \in \mathcal{S}$ かつ任意の有限個の $\mathcal{S}$ の元の和集合がまた $\mathcal{S}$ に属するとき，$S$ は有限の和集合で閉じるという．同様に，$X \in \mathcal{S}$ かつ任意の有限個の $\mathcal{S}$ の元の共通部分がまた $\mathcal{S}$ に属するとき，$S$ は有限の共通部分で閉じるという．
- 位相空間 $X$ が $T_0$ あるいはコルモゴロフ (Kolmogorov) であるとは，任意の相異なる二点 $x, y \in X$ に対してある開集合 $U \subseteq X$ が存在して，$x \in U$ かつ $y \notin U$ が成り立つか，または $x \notin U$ かつ $y \in U$ が成り立つときをいう．
- 位相空間 $X$ が準コンパクト (quasi-compact) であるとは，任意の開被覆が有限部分被覆を持つときをいう．
- 位相空間 $X$ の部分集合 $C$ に対して，$C$ を含む閉集合のうち最小のものを $C$ の閉包といい，$\overline{C}$ で表す．開集合 $U \subseteq X$ に対して，$C \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{C} \cap U \neq \emptyset$ である．
- 位相空間 $X$ の開集合系 (位相) を $\mathcal{O}_X$ とし，閉集合系を $\mathcal{A}_X$ で表す．
- $X$ の開集合族 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}_X$ が開基 (open basis) であるとは，任意の開集合が $\mathcal{B}$ の元の和集合で表せるときをいう．これは，任意の開集合 $U \subseteq X$ と点 $x \in U$ に対して，$x \in B \subseteq U$ となる $B \in \mathcal{B}$ が存在することと同値である．開集合族 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}_X$ が開基 $\mathcal{B}$ を含むとき，$\mathcal{S}$ もまた $X$ の開基である．
- $X$ の閉集合族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}_X$ が閉基 (closed basis) であるとは，任意の閉集合が $\mathcal{F}$ の元の共通集合で表せるときをいう．これは，任意の閉集合 $C \subseteq X$ と点 $x \notin C$ に対して，$C \subseteq F$ かつ $x \notin F$ となる $F \in \mathcal{F}$ が存在することと同値である．
- $X$ の開集合族 $\mathscr{S} \subseteq \mathcal{O}_X$ が準開基 (open subbasis) であるとは，任意の $O \in \mathcal{O}_X$ と $x \in O$ に対して，$N_1, \ldots, N_n \in \mathscr{S}$ が存在して，$x \in N_1 \cap \cdots \cap N_n \subseteq O$ となるときをいう．開集合族 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}_X$ が準開基 $\mathscr{S}$ を含むとき，$\mathcal{S}$ もまた $X$ の準開基である．

## 1 分配束の復習

**定義 1.1.** $(P, \leq)$ を順序集合とする．部分集合 $S \subseteq P$ に対して，元 $a \in P$ が $S$ の上界であるとは，任意の $s \in S$ に対し $s \leq a$ を満たすときをいう．$S$ の上界 $a$ が最小上界である，すなわち任意の $S$ の上界 $a'$ に対して $a \leq a'$ が成り立つとき，$a$ は $S$ の join であるといい $a = \vee S$ とかく．

双対的に，部分集合 $S \subseteq P$ に対して，元 $b \in P$ が $S$ の下界であるとは，任意の $s \in S$ に対し $b \leq s$ を満たすときをいう．$S$ の下界 $b$ が最大下界である，すなわち任意の $S$ の下界 $b'$ に対して $b' \leq b$ が成り立つとき，$b$ は $S$ の meet であるといい $b = \wedge S$ とかく．

特に，$\{a, b\} \subseteq P$ に対しては，$\vee\{a, b\} = a \vee b$，$\wedge\{a, b\} = a \wedge b$ とかく．$S = \emptyset$ のとき，$S$ の join と meet が存在すれば，これらはそれぞれ $P$ の最小元，最大元となる．

**定義 1.2.** 順序集合 $P$ が束 (lattice) であるとは，$P$ がすべての有限 join と有限 meet を持つ，すなわち任意の $P$ の有限部分集合に対して join と meet が存在するときをいう．$P$ が束のとき，特に $\emptyset \subseteq P$ の join と meet として，最小元と最大元が存在する．束 $P$ の最小元，最大元を，それぞれ $0 = \vee\emptyset$，$1 = \wedge\emptyset$ と表す[*1]．

**定義 1.3.** $P, Q$ を束とする．写像 $v\colon P \to Q$ が束準同型 (lattice homomorphism) であるとは，すべての有限 join と有限 meet を保つときをいう．すなわち

$$v(a \vee b) = v(a) \vee v(b), \quad v(a \wedge b) = v(a) \wedge v(b), \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 1$$

をみたすもののこと．$a, b \in P$ に対して $a \leq b$ であることと $a \vee b = b$ であることは同値だから，束準同型は順序を保つことに注意する．

束と束準同型のなす圏を，$\mathsf{Lat}$ で表す．

**命題 1.4.** 束準同型 $v\colon P \to Q$ が圏 $\mathsf{Lat}$ の同型射である必要十分条件は，全単射であることである．

*Proof.* 必要性は明らか．$v$ が同型であるためには，$v$ が全単射なことで十分であることを示す．

$v$ は全単射だから，逆写像 $u\colon Q \to P$ が存在する．$1 = v(1), 0 = v(0)$ より，$u(1) = 1, u(0) = 0$ である．$a, b \in Q$ に対して，$vu(a \wedge b) = a \wedge b = vu(a) \wedge vu(b) = v(u(a) \wedge u(b))$ より，$u(a \wedge b) = u(a) \wedge u(b)$ が成り立つ．同様に $u(a \vee b) = u(a) \vee u(b)$ もわかり，$u$ は束準同型となる．この $u$ は $\mathsf{Lat}$ における $v$ の逆射を与え，$v$ は同型である． □

束においては $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ が成立する：なぜなら，$b \vee c \geq b, c$ より $a \wedge (b \vee c) \geq$

[*1] 束の定義に最大元・最小元の存在を含めない流儀もある．ゆえ，最大元・最小元をもつ束は有界であるともいう．

$a \wedge b, a \wedge c$ であり，$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ となるからである．逆の不等号は一般には成り立たない．

**定義 1.5.** 束 $P$ が分配束 (distributive lattice) であるとは，すべての $a, b, c \in P$ に対して

$$\text{分配律} : a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

が成り立つときをいう．分配束のなす Lat の充満部分圏を DLat と表す．

**補題 1.6.** 分配束 $P$ において

$$\text{双対分配律} : a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

が成り立つ．

*Proof.* $a \wedge (a \vee b) = a, a \vee (a \wedge b) = a$ (吸収律) が成り立つことと分配律より，$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) = a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) = (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$ となる． □

分配束の重要なクラスとして，ブール代数がある．

**定義 1.7.** 束 $P$ の元 $a$ に対して

$$a \wedge x = 0, \quad a \vee x = 1$$

をみたす元 $x$ を，$a$ の補元という．

**補題 1.8.** 分配束において，$a$ の補元は，存在すれば一意である．

*Proof.* $x$ と $y$ が $a$ の補元だとすると，$x = x \wedge 1 = x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee (x \wedge y) = 0 \vee (x \wedge y) = x \wedge y$ となる．同様に $y = y \wedge x$ が示せるから，$x = y$ となる． □

分配束における，この一意的な $a$ の補元を $\neg a$ とかく．補元の一意性から，分配束においては明らかに $\neg\neg a = a$ が成り立つ．

**定義 1.9.** ブール代数 (Boolean algebra) とは，すべての元が補元を持つような分配束のこと．ブール束 (Boolean lattice) ともいう．

たとえば，二元集合 $2 = \{0, 1\}$ は最大元と最小元のみを持つブール代数とみなせる．集合 $A$ に対し，そのベキ集合 $\mathcal{P}(A)$ は集合の包含関係を順序としてブール代数をなす．位相空間 $X$ の開集合系を $\mathcal{O}(X)$ とかくと，これは分配束となるがブール代数ではない．位相空間 $X$ の閉かつ開な集合 (clopen set) 全体を $\mathrm{clop}(X)$ とおけば，これはブール代数となる．

ブール代数においても，de Morgan の法則が成り立つ．

**命題 1.10** (De Morgan の法則)**.** ブール代数において

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b, \quad \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$

が成立．

*Proof.* 演算 $\wedge, \vee$ が結合的であることと分配律より

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) &= ((a \wedge b) \wedge \neg a) \vee ((a \wedge b) \wedge \neg b) \\
&= ((a \wedge \neg a) \wedge b) \vee (a \wedge (b \wedge \neg b)) \\
&= (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) \\
&= 0 \vee 0 = 0 \\
(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) &= (a \vee (\neg a \vee \neg b)) \wedge (b \vee (\neg a \vee \neg b)) \\
&= ((a \vee \neg a) \vee \neg b)) \wedge (\neg a \vee (b \vee \neg b)) \\
&= (1 \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee 1) \\
&= 1 \wedge 1 = 1
\end{aligned}$$

となり，補元の一意性から $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ を得る．$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ も同様に示せる． □

**補題 1.11.** ブール代数からブール代数への束準同型 $v\colon A \to B$ は演算 $\neg$ を保つ．

*Proof.* 任意の $a \in A$ に対して，$a \wedge \neg a = 0$, $a \vee \neg a = 1$ であるから，$v(a) \wedge v(\neg a) = 0$, $v(a) \vee v(\neg a) = 1$ が成り立ち，補元の一意性より，$v(\neg a) = \neg v(a)$ となる． □

この補題 1.11 より，ブール代数の間の束準同型は，ブール準同型 (Boolean homomorphism) とも呼ばれる．ブール代数とブール準同型のなす圏を BLat で表す．これは DLat の充満部分圏である．

束論においてもイデアル・フィルターの概念は有効である．

**定義 1.12.** $L$ を (有界な) 束とする．部分集合 $I \subseteq L$ がイデアル (ideal) であるとは，

(i) $0 \in I$
(ii) $a \leq b$ かつ $b \in I$ ならば，$a \in I$
(iii) $a, b \in I$ のとき，$a \vee b \in I$

をみたすときをいう．また部分集合 $F \subseteq L$ がフィルター (filter) であるとは，

(i) $1 \in F$
(ii) $a \leq b$ かつ $a \in F$ ならば，$b \in F$
(iii) $a, b \in F$ のとき，$a \wedge b \in F$

をみたすときをいう．

束 $L$ の元 $a$ に対して，

$$a^{\downarrow} := \{b \in L \mid b \leq a\}$$
$$a^{\uparrow} := \{b \in L \mid a \leq b\}$$

とおけば，$a^{\downarrow}$ は $L$ のイデアルで，$a^{\uparrow}$ は $L$ のフィルターである．

**定義 1.13.** $L$ を束とする．真のイデアル $I \subsetneq L$ が素イデアル (prime ideal) であるとは，

$$\forall a, b \in L, \quad a \wedge b \in I \implies a \in I \text{ or } b \in I$$

が成り立つときをいう．また真のフィルター $F \subsetneq L$ が素フィルター (prime filter) であるとは，

$$\forall a, b \in L, \quad a \vee b \in F \implies a \in F \text{ or } b \in F$$

が成り立つときをいう．

**命題 1.14.** 束 $L$ に対して，束 $2$ への束準同型 $L \to 2$ 全体の集合と，$L$ の素イデアル全体の集合と，$L$ の素フィルター全体の集合との間には，

$$(\text{束準同型 } L \to 2) \to (L \text{ の素イデアル}); \quad v \mapsto v^{-1}(0)$$
$$(\text{束準同型 } L \to 2) \to (L \text{ の素フィルター}); \quad v \mapsto v^{-1}(1)$$

によって全単射が存在する．

*Proof.* 容易なので試みられよ． □

**命題 1.15.** 分配束 $L$ のイデアル $I$ とフィルター $F$ が，$I \cap F = \emptyset$ をみたすとする．このとき，$L$ の素イデアル $J$ であって $I \subseteq J$ かつ $J \cap F = \emptyset$ をみたすものが存在する．

*Proof.* $L$ のイデアルから成る集合

$$\Sigma = \{I' \subseteq L : \text{ideal} \mid I \subseteq I',\ I' \cap F = \emptyset\}$$

を考える．$I \in \Sigma$ より $\Sigma \neq \emptyset$ である．$\Sigma$ の空でない全順序部分集合 $\Sigma' \subseteq \Sigma$ を任意にとる．$\tilde{I} = \bigcup_{I' \in \Sigma'} I'$ とおくとき，$\tilde{I}$ はイデアルである．

$\because$) $0 \in \tilde{I}$ は明らか．
　$a \leq b$ かつ $b \in \tilde{I}$ のとき，$b \in I'$ なる $I' \in \Sigma'$ が存在する．$I'$ はイデアルであるから $a \in I'$ であり，よって $a \in \tilde{I}$ となる．
　$a, b \in \tilde{I}$ のとき，$a \in I'_1$ なる $I'_1 \in \Sigma'$ と，$b \in I'_2$ なる $I'_2 \in \Sigma'$ が存在する．$\Sigma'$ は全順序だから $I'_1 \subseteq I'_2$ または $I'_2 \subseteq I'_1$ が成り立ち，よって $a \vee b \in I'_2$ または $a \vee b \in I'_1$ となる．いずれにせよ $a \vee b \in \tilde{I}$ が従う．

このとき $\tilde{I}$ は $\Sigma'$ の上界である．よって Zorn の補題により，$\Sigma$ は極大元 $J$ をもつ．$1 \notin J$ より $J \neq L$ に注意する．

あとはこの極大元 $J \in \Sigma$ が $L$ の素イデアルであることを示せばよい．$J$ が素イデアルではないとすると，$a \wedge b \in J$ となる $a, b \in L \setminus J$ がとれる．ここで

$$J_a = \{x \vee (u \wedge a) \mid x \in J,\ u \in L\}$$
$$J_b = \{x \vee (u \wedge b) \mid x \in J,\ u \in L\}$$

とおくと，$J_a, J_b$ はイデアルで，$J \subsetneq J_a, J \subsetneq J_b$ が成り立つ．

$\because$) $J_a$ についてだけ示す．$x \in J$ に対して，$u = 0$ とすれば $x = x \vee 0 = x \vee (0 \wedge a) \in J_a$ となり，$J \subseteq J_a$ がわかる．特に $0 \in J_a$ である．また $x = 0 \in J, u = 1$ とすれば，$a = 0 \vee (1 \wedge a) \in J_a$ となるから，$J \neq J_a$ である．

$c \leq x \vee (u \wedge a)$ $(x \in J, u \in L)$ のとき，分配律を用いれば

$$c = c \wedge (x \vee (u \wedge a)) = (c \wedge x) \vee (c \wedge u \wedge a)$$

となり，$J$ はイデアルより $c \wedge x \in J$ であるから，$c \in J_a$ となる．

$s = x \vee (u \wedge a), s' = x' \vee (u' \wedge a) \in J_a$ $(x, x' \in J,\ u, u' \in L)$ に対して，分配律を用いれば

$$s \vee s' = x \vee x' \vee (u \wedge a) \vee (u' \wedge a) = (x \vee x') \vee ((u \vee u') \wedge a)$$

となり，$J$ はイデアルより $x \vee x' \in J$ であるから，$s \vee s' \in J_a$ となる．

$J$ の極大性から $J_a, J_b \notin \Sigma$ である．このとき $J_a \cap F \neq \emptyset$，$J_b \cap F \neq \emptyset$ となるから，元 $s = x \vee (u \wedge a) \in J_a \cap F$，$s' = x' \vee (u' \wedge b) \in J_b \cap F$ $(x, x' \in J,\ u, u' \in L)$ がとれる．$F$ はフィルターだから $s \wedge s' \in F$ である．一方

$$s \wedge s' = (x \wedge x') \vee (x \wedge u' \wedge b) \vee (x' \wedge u \wedge a) \vee (u \wedge u' \wedge a \wedge b)$$

において，$x, x', a \wedge b \in L$ より $x \wedge x', x \wedge u' \wedge b, x' \wedge u \wedge a, u \wedge u' \wedge a \wedge b \in J$ であるから $s \wedge s' \in J$ となる．しかしこれでは $J \cap F = \emptyset$ に矛盾．したがって $J$ は素イデアルである．$\square$

**系 1.16.** 分配束 $L$ の元 $a, b \in L$ に対して $a \not\leq b$ であるとき，$v(a) = 1, v(b) = 0$ となる束準同型 $v \colon L \to 2$ が存在する．

*Proof.* $a \not\leq b$ のとき，$L$ のイデアル $b^{\downarrow}$ とフィルター $a^{\uparrow}$ について $b^{\downarrow} \cap a^{\uparrow} = \emptyset$ が成り立つ．よって命題 1.15 により，$b^{\downarrow} \subseteq J$ かつ $J \cap a^{\uparrow} = \emptyset$ となる素イデアル $J$ が存在する．この素イデアル $J$ に対して，写像 $v \colon L \to 2$ を

$$v(c) = \begin{cases} 0 & (c \in J) \\ 1 & (c \notin J) \end{cases}$$

によって定めると，$v$ は束準同型になることがわかる．定義から $v(a) = 1$ かつ $v(b) = 0$ である．$\square$

## 2 Spectral 空間論

この節では，spectral 空間についての一般論を展開する．

### 2.1 位相空間論から：Sober 空間，Specialization

**定義 2.1.** 位相空間 $X$ の空でない部分集合 $C \neq \emptyset$ に対して，$C$ が既約 (irreducible) であるとは，任意の閉集合 $F, F' \subseteq X$ に対して，$C \subseteq F \cup F'$ ならば $C \subseteq F$ または $C \subseteq F'$ が成り立つときをいう．

**命題 2.2.** 位相空間 $X$ の部分集合 $C \neq \emptyset$ が既約である必要十分条件は，任意の開集合 $U, U' \subseteq X$ に対して

$$C \cap U \neq \emptyset,\ C \cap U' \neq \emptyset \implies C \cap (U \cap U') \neq \emptyset$$

となることである．

*Proof.* 定義の言い換えである． □

**補題 2.3.** 位相空間 $X$ の部分集合 $C \neq \emptyset$ に対して，

$$C \text{ が既約である} \iff \overline{C} \text{ が既約である．}$$

*Proof.* $C$ が既約であるとする．閉集合 $F, F' \subseteq X$ に対して $\overline{C} \subseteq F \cup F'$ であるとき，$C \subseteq F \cup F'$ となるから既約性より $C \subseteq F$ または $C \subseteq F'$ が成り立つ．$F, F'$ は閉集合だから，$\overline{C} \subseteq F$ または $\overline{C} \subseteq F'$ となり，よって $\overline{C}$ は既約である．

逆に $\overline{C}$ が既約であるとする．閉集合 $F, F' \subseteq X$ に対して $C \subseteq F \cup F'$ であるとき，$F \cup F'$ も閉集合であるから $\overline{C} \subseteq F \cup F'$ となり，既約性より $\overline{C} \subseteq F$ または $\overline{C} \subseteq F'$ が成り立つ．特に $C \subseteq F$ または $C \subseteq F'$ となり，よって $C$ は既約である． □

位相空間 $X$ の点 $x \in X$ について，$\{x\}$ は明らかに既約だから $\overline{\{x\}}$ は既約な閉集合となる．$X$ の既約閉集合 $C$ が，ある $x \in X$ を用いて $C = \overline{\{x\}}$ と表せるとき，$x$ を $C$ の生成点 (generic point) という．一般には，一点集合の閉包の形で表せない (つまり生成点を持たない) 既約閉集合が存在する．

**定義 2.4.** 位相空間 $X$ が sober であるとは，すべての既約閉集合が一意的な生成点を持つときをいう．

**命題 2.5.** 位相空間 $X$ について，

$$X \text{ は } T_0 \text{ である} \iff \text{既約閉集合の生成点は高々一つしかない}$$

が成り立つ．特に sober な位相空間は $T_0$ である．

*Proof.* $(\Rightarrow)$: $X$ は $T_0$ であるとする．既約閉集合 $C$ が $x, y \in X$ を生成点に持つとき，$C = \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ である．もし $x \neq y$ であるとすると $T_0$ 性より，ある開集合 $U \subseteq X$ が存在して，$x \in U$ かつ $y \notin U$ が成り立つか，または $x \notin U$ かつ $y \in U$ が成り立つ．$x \in U$ かつ $y \notin U$ が成り立つとすると，$\emptyset \neq \overline{\{x\}} \cap U = \overline{\{y\}} \cap U$ より $y \in U$ となるが，これは $y \notin U$ に矛盾する．$x \notin U$ かつ $y \in U$ のときも同様に矛盾．よって $x = y$ となり，生成点は存在すれば一意である．

$(\Leftarrow)$: 二点 $x, y \in X$ について，$x \neq y$ とする．このとき生成点の一意性から $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ である．$x \notin \overline{\{y\}}$ の場合，開集合 $U$ を $U = X \setminus \overline{\{y\}}$ とおけば，$x \in U$ かつ $y \notin U$ となる．$x \in \overline{\{y\}}$ の場合，$\overline{\{x\}} \subsetneq \overline{\{y\}}$ であるから，開集合 $U$ を $U = X \setminus \overline{\{x\}}$ とおけば $U \cap \overline{\{y\}} \neq \emptyset$ より $x \notin U$ かつ $y \in U$ となる．したがって $X$ は $T_0$ である．$\square$

**命題 2.6.** Hausdorff 位相空間の既約閉集合は一元集合に限る．特に，Hausdorff 空間は sober である．

*Proof.* $X$ を Hausdorff 空間とし，$X$ の既約閉集合 $C \neq \emptyset$ について，$C$ が異なる二つの元 $x \neq y$ を持つとする．すると Hausdorff 性から，

$$x \in U, \quad y \in U', \quad U \cap U' = \emptyset$$

となる開集合 $U, U' \subseteq X$ が取れる．このとき $C \cap U \neq \emptyset$，$C \cap U' \neq \emptyset$ であるから，命題 2.2 より $C \cap U \cap U' \neq \emptyset$ となるが，これでは $U \cap U' = \emptyset$ に矛盾する．よって $C$ は一元集合である．$\square$

**定義 2.7.** 位相空間 $X$ に対して，$X$ 上の二項関係 $\rightsquigarrow$ を

$$x \rightsquigarrow y \iff y \in \overline{\{x\}}$$

によって定めると，これは前順序 (preorder) になる．この前順序 $\rightsquigarrow$ を specialization order あるいは specialization という．$x \rightsquigarrow y$ のとき，$y$ は $x$ の specialization である，または $x$ は $y$ の generization であるという．

**命題 2.8.** 連続写像 $f\colon X \to Y$ は specialization を保つ．すなわち，$x, x' \in X$ に対して $x \rightsquigarrow x'$ ならば $f(x) \rightsquigarrow f(x')$ が成り立つ．

*Proof.* $x \rightsquigarrow x'$ のとき，$x' \in \overline{\{x\}}$ であるから $f(x') \in f(\overline{\{x\}})$ となる．連続性より $f(\overline{\{x\}}) \subseteq \overline{\{f(x)\}}$ であるから，$f(x') \in \overline{\{f(x)\}}$ となり $f(x) \rightsquigarrow f(x')$ が成り立つ．$\square$

一般に specialization order は半順序 (partial order) ではないが次が成り立つ．

**命題 2.9.** 位相空間 $X$ に対して

$$\rightsquigarrow \text{ は半順序をなす} \iff X \text{ は } T_0 \text{ である．}$$

*Proof.* (⇒): $x, y \in X$ に対して，$\rightsquigarrow$ の反対称律より，$y \in \overline{\{x\}}$ かつ $x \in \overline{\{y\}}$ ならば $x = y$ となる．これは $x \neq y$ のとき，$y \in X \setminus \overline{\{x\}}$ または $x \in X \setminus \overline{\{y\}}$ となること意味し，よって $X$ は $T_0$ である．

(⇐): $x, y \in X$ について，$x \rightsquigarrow y$ かつ $y \rightsquigarrow x$ とする．$x \neq y$ とすると，ある開集合 $U \subseteq X$ が存在して，$x \in U$ かつ $y \notin U$ が成り立つか，または $x \notin U$ かつ $y \in U$ が成り立つ．前者の場合，$y \rightsquigarrow x$ より $x \in U \cap \overline{\{y\}}$ となり，よって $y \in U$ となるがこれは $y \notin U$ に矛盾．後者も同様．したがって $x = y$ となる． □

## 2.2 Spectral 空間

位相空間 $X$ に対して，quasi-compact な開集合全体の集合を

$$\mathring{\mathcal{K}}(X) \coloneqq \{U \subseteq X \mid U \text{ は quasi-compact open}\}$$

とおく．$\mathring{\mathcal{K}}(X)$ は $\mathcal{P}(X)$ の部分集合として有限個の元の和集合をとる操作で閉じ，$\emptyset \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ である．

**定義 2.10.** 位相空間 $X$ が spectral 空間であるとは，

(S1) $X$ は quasi-compact である
(S2) $X$ は quasi-compact な開集合からなる開基 $\mathcal{B}_X \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(X)$ をもつ
(S3) $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ は有限個の元の共通集合をとる操作で閉じる
(S4) $X$ は sober である

をみたすときをいう．coherent 空間と呼ばれることもある ([Joh82], [SAG])．上の条件 (S1)–(S3) をみたす位相空間を pre-spectral 空間と呼ぶことにする[*2]．

$X$ が spectral 空間のとき，$\mathring{\mathcal{K}}(X)$ は (S2) より $X$ の開基をなし，(S1) と (S3) より $\mathcal{O}_X$ の有界な部分分配束になる．また (S4) より spectral 空間は $T_0$ で，$X$ 上の specialization order $\rightsquigarrow$ は半順序になる．明らかに spectral 空間は $T_0$ な pre-spectral 空間である．

**命題 2.11.** $X$ を位相空間とする．$\mathcal{S} \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(X)$ が $X$ のある開基を含み，有限の和集合で閉じるならば，$\mathcal{S} = \mathring{\mathcal{K}}(X)$ となる．

*Proof.* 任意の $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ に対して，$\mathcal{S}$ が $X$ の開基を含むから，$U$ は $\mathcal{S}$ の元の和集合で書ける．$U$ は quasi-compact だからこれは有限個の $\mathcal{S}$ の元の和集合としてよく，$\mathcal{S}$ は有限の和集合で閉じることから $U \in \mathcal{S}$ となる． □

[*2] 本稿だけの用語であることに注意．

**定義 2.12.** $X, Y$ を spectral 空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ が spectral 写像であるとは，すべての $V \in \mathring{\mathcal{K}}(Y)$ に対して $f^{-1}(V) \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ が成り立つときをいう．

**命題 2.13.** spectral 空間 $X, Y$ に対して，spectral 写像 $f\colon X \to Y$ は連続写像である．

*Proof.* spectral 空間 $Y$ が quasi-compact な開集合からなる開基 $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(Y)$ を持つことから明らか． □

spectral 空間と spectral 写像のなす圏を $\mathsf{Spectral}$ で表す．位相空間と連続写像なのなす圏を $\mathsf{Top}$ とすると，命題 2.13 により $\mathsf{Spectral}$ は $\mathsf{Top}$ の部分圏となる．

spectral 空間 $X$ に対して，分配束 $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ が得られる．$f\colon X \to Y$ が spectral 写像なら，束準同型

$$\mathring{\mathcal{K}}(f)\colon \mathring{\mathcal{K}}(Y) \to \mathring{\mathcal{K}}(X)\,; \quad V \mapsto f^{-1}(V)$$

が定まる．これらの対応は反変関手

$$\mathring{\mathcal{K}}\colon \mathsf{Spectral}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{DLat}$$

を与える．

**例 2.14.** (i) 空集合 $\emptyset$ はその唯一の位相 $\{\emptyset\}$ によって位相空間となるが、これは spectral 空間である．

(ii) 一元集合 $1 = \{0\}$ もその唯一の位相 $\{\emptyset, 1\}$ によって spectral 空間となる．この spectral 空間を $\mathbb{1}$ と表す．

(iii) 二元集合 $2 = \{0, 1\}$ には本質的に三つの位相が入りうる：離散位相，Sierpiński 位相 $\{\emptyset, \{0\}, 2\}$，密着位相である．離散位相に関しては spectral 空間になるが，密着位相では $T_0$ ではないから spectral 空間にはならない．$2$ に Sierpiński 位相をのせると spectral 空間になり，これを $\mathbb{2}$ と表す．

一般に $T_0$ な有限集合は spectral 空間になる ([DST19, Proposition 1.1.15])．

spectral 空間の重要なクラスに，ストーン空間がある．

**定義 2.15.** 位相空間 $X$ が完全不連結 (totally disconnected) であるとは，任意の部分空間 $C \subseteq X$ に対して，$C$ が連結ならば一元集合となるときをいう．言い換えれば，すべての連結成分が一点集合であるような位相空間のこと．ここで，空集合は連結でないとする．

**定義 2.16.** ストーン空間 (Stone space) とは，完全不連結かつ quasi-compact な Hausdorff 位相空間のことである．ブール空間 (Boolean space) とも呼ばれる．ストーン空間のなす $\mathsf{Top}$ の充満部分圏を，$\mathsf{Stone}$ とかく．

**命題 2.17.** quasi-compact な Hausdorff 位相空間 $X$ に対して，

$$X \text{ が完全不連結である} \iff X \text{ の開閉集合 (clopen set) からなる開基をもつ}.$$

後者をみたす位相空間は，ゼロ次元 (zero-dimensional) であると呼ばれる．

*Proof.* ($\Leftarrow$)[*3]: 空でない部分空間 $C \subseteq X$ が連結であるとする．$x, y \in C$ について，$x \neq y$ であると仮定すると，$X$ は Hausdorff であるから，

$$\exists U \subseteq X : \text{open}, \quad x \in U, y \notin U$$

となる．ここで $X$ は開閉集合からなる開基を持つから，$U$ は clopen であるとして良い．すると $C \cap U$ は $C$ の clopen 集合となるから，$C$ が連結より $C \cap U = \emptyset$ または $C \cap U = C$ が成り立つ．しかし，$x \in U$ より $C \cap U \neq \emptyset$ であり，$y \notin U$ より $C \cap U \neq C$ であるから，これは矛盾である．よって $x = y$ となり $C$ は一元集合となる．したがって $X$ は完全不連結．

($\Rightarrow$): $x \in X$ をとる．まず，$x$ を含む clopen 集合全体の共通部分 $P$ について考える．すなわち，$x$ を含む clopen 集合全体の集合を $\mathcal{P} = \{W \subseteq X \mid W \text{ は開閉集合で } x \in W\}$ として，$P = \bigcap \mathcal{P} \coloneqq \bigcap_{W \in \mathcal{P}} W$ を考える．特に，$P$ は閉集合で $x \in P$ である．このとき，任意の閉集合 $F \subseteq X$ に対して，$F \cap P = \emptyset$ ならば，$F \cap W = \emptyset$ となる $W \in \mathcal{P}$ が存在する：実際，$X$ は準コンパクトだから $F$ も準コンパクトで，$\{W^c \mid W \in \mathcal{P}\}$ は $F$ の開被覆をなすから，有限個の $W_1, \dots, W_n \in \mathcal{P}$ が存在して，$F \subseteq W_1^c \cup \cdots \cup W_n^c = (W_1 \cap \cdots \cap W_n)^c$ となる．$W' = W_1 \cap \cdots \cap W_n$ と置けば，$W' \in \mathcal{P}$ で $F \cap W' = \emptyset$ をみたす．

次に，このことを踏まえて，$P = \{x\}$ となることを示そう．$P \supsetneq \{x\}$ だと仮定する．$X$ は完全不連結であるから $P$ は不連結で，

$$\exists\, A, B \subseteq P : \text{non-empty closed}, \quad A \cap B = \emptyset, A \cup B = P, x \in A$$

となる．$X$ は準コンパクト Hausdorff だから正規であり，

$$\exists U, V \subseteq X : \text{open}, \quad U \cap V = \emptyset, A \subseteq U, B \subseteq V$$

となる．$F = X \setminus (U \cup V)$ とおくと，これは $F \cap P = \emptyset$ をみたす閉集合であるから，$F \cap W = \emptyset$ となる $W \in \mathcal{P}$ が存在する．このとき，開集合 $G = U \cap W$ を考えると，

$$\overline{G} = \overline{U \cap W} \subseteq \overline{U} \cap W \subseteq V^c \cap F^c = U \cap V^c \subseteq U$$

だから，$\overline{G} \subseteq U \cap W = G$ となり，$G$ 閉集合でもある．$x \in G$ だから $G \in \mathcal{P}$ であるが，$G \cap B = \emptyset$ より $P \nsubseteq G$ となり，これは矛盾．したがって，$P = \{x\}$ である．

さて，$x$ の開近傍 $O$ を任意にとるとき，$P = \{x\} \subseteq O$ であるから，閉集合 $O^c$ は $O^c \cap P = \emptyset$ をみたす．ゆえに，$O^c \cap W = \emptyset$ となる $W \in \mathcal{P}$ が存在し，このとき $x \in W \subseteq O$ となる．以上より $X$ は $\mathrm{clop}(X)$ を開基にもつ． $\square$

[*3] この証明は $T_1$ 性があれば十分である．

位相空間 $X$ に対して，開かつ閉な部分集合 (clopen subset) 全体の集合を $\mathrm{clop}(X)$ とすると，これがブール代数になることは述べた．

**補題 2.18.** ストーン空間 $X$ に対して，$\mathrm{clop}(X) = \mathring{\mathcal{K}}(X)$ が成り立つ．

*Proof.* $X$ がストーン空間なら，命題 2.17 により $\mathrm{clop}(X)$ は $X$ の開基をなす．$X$ の quasi-compact 性から $\mathrm{clop}(X) \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(X)$ がわかり，$\mathrm{clop}(X)$ は有限の和集合で閉じるから，命題 2.11 より $\mathrm{clop}(X) = \mathring{\mathcal{K}}(X)$ となる． □

**定理 2.19.** 位相空間 $X$ に対して，次は同値である．

(i) $X$ は spectral かつ Hausdorff である
(ii) $X$ は spectral かつ $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ はブール代数となる
(iii) $X$ はストーン空間である

特にストーン空間は spectral 空間である．

*Proof.* (i) $\Rightarrow$ (iii): $X$ が quasi-compact かつ Hausdorff であることは明らか．また Hausdorff 空間において quasi-compact 部分集合は閉であるから，$\mathring{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathrm{clop}(X)$ となり，特に $\mathrm{clop}(X)$ は開基である．よって $X$ はストーン空間である．

(iii) $\Rightarrow$ (ii): ストーン空間は quasi-compact だから (S1) は明らか．$X$ がストーン空間のとき補題 2.18 より $\mathrm{clop}(X) = \mathring{\mathcal{K}}(X)$ となるから，$X$ は (S2), (S3) をみたし，特に $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ はブール代数である．さらに命題 2.6 より (S4) も成り立つ．

(ii) $\Rightarrow$ (i): $X$ が Hausdorff であることを示せばよい．$X$ の異なる二点 $x \neq y$ に対して，$X$ は $T_0$ で $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ を開基に持つから，$x$ と $y$ のどちらか一方のみを含む $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ が存在する．ここで $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ はブール代数であるから $X \smallsetminus U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ となり，このとき開集合 $U$ と $X \smallsetminus U$ が $x, y$ を分離する．よって $X$ は Hausdorff である． □

**命題 2.20.** spectral 空間 $X$ からストーン空間 $Y$ への写像 $f\colon X \to Y$ に対して

$$f \text{ は連続である} \iff f \text{ は spectral 写像である}$$

が成り立つ．特にストーン空間の間の連続写像は spectral 写像である．

*Proof.* 命題 2.13 により spectral 写像は連続である．逆に $f$ を連続写像とする．quasi-compact な開集合 $V \in \mathring{\mathcal{K}}(Y)$ に対して，$Y$ は Hausdorff だから $V$ は閉集合でもあり，よって $f^{-1}(V)$ は $X$ の開かつ閉集合となる．$X$ の quasi-compact 性から $f^{-1}(V)$ は開かつ quasi-compact であり，$f^{-1}(V) \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ となる．よって $f$ は spectral 写像である． □

定理 2.19 と命題 2.20 より，ストーン空間の圏 $\mathsf{Stone}$ は spectral 空間の圏 $\mathsf{Spectral}$ の充満部分圏となる．

### 2.3 Constructible 位相

spectral 空間では，もともとの位相の他に新たな位相をのせて考えることが多い．そのうちの一つが constructible 位相である．

位相空間 $X$ の quasi-compact な開集合の補集合全体の集合を

$$\overline{\mathcal{K}}(X) \coloneqq \{X \setminus U \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)\}$$

と置く．$X$ が pre-spectral 空間なら，$\overline{\mathcal{K}}(X)$ は分配束になる．

> **定義 2.21.** $X$ を pre-spectral 空間，つまり定義 2.10 の条件 (S1)–(S3) をみたす位相空間とする．このとき，$\mathring{\mathcal{K}}(X) \cup \overline{\mathcal{K}}(X)$ を準開基とする $X$ 上の位相のことを，$X$ 上の constructible topology (あるいは patch topology) という．言い換えると，$X$ の quasi-compact な開集合が clopen 集合となるような最小の位相のこと．
>
> $X$ 上に constructible 位相をのせて位相空間としたものを $X$ の patch 空間といい，$X_{\mathrm{con}}$ と表す．

(pre-)spectral 空間 $X$ 上の constructible 位相を考えているとき，もともとの $X$ の位相を (pre-)spectral 位相と呼ぶこともある．

> **命題 2.22.** (pre-)spectral 空間 $X$ の constructible 位相は，もともとの (pre-)spectral 位相よりも細かい．言い換えれば，$\mathrm{id}_X \colon X_{\mathrm{con}} \to X$ は連続である．

*Proof.* $\mathcal{B}_X \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(X) \cup \overline{\mathcal{K}}(X)$ より明らか. □

> **命題 2.23.** spectral 空間 $X$ に対して，$X_{\mathrm{con}}$ は Hausdorff 空間である．

*Proof.* $x \neq y$ なる $x, y \in X_{\mathrm{con}}$ をとる．spectral 空間 $X$ が $T_0$ で $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ を開基にもつことから，ある開集合 $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ が存在して，$x \in U$ かつ $y \notin U$ が成り立つか，または $x \notin U$ かつ $y \in U$ が成り立つ．いずれにせよ，$X_{\mathrm{con}}$ の開集合 $U, X \setminus U \subseteq X_{\mathrm{con}}$ は $x$ と $y$ を分離する．よって $X_{\mathrm{con}}$ は Hausdorff である. □

> **命題 2.24.** $X$ を spectral 空間とするとき，$\mathcal{B}_{\mathrm{con}} = \{U \cap V \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X), V \in \overline{\mathcal{K}}(X)\}$ は $X_{\mathrm{con}}$ の clopen 集合から成る開基をなす．

*Proof.* constructible 位相の定義から $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X), V \in \overline{\mathcal{K}}(X)$ は $X_{\mathrm{con}}$ の開集合である．$X \in \overline{\mathcal{K}}(X)$ であるから，$U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ に対して $U = U \cap X \in \mathcal{B}_{\mathrm{con}}$ より，$\mathring{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathcal{B}_{\mathrm{con}}$ である．同様に $X \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ であることから，$\overline{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathcal{B}_{\mathrm{con}}$ となる．よって $\mathring{\mathcal{K}}(X) \cup \overline{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathcal{B}_{\mathrm{con}}$ である．$\mathcal{B}_{\mathrm{con}}$ が有限の共通部分で閉じることから，$X_{\mathrm{con}}$ の位相の入れ方より，$\mathcal{B}_{\mathrm{con}}$ は $X_{\mathrm{con}}$ の開基である．各 $U \cap V \in \mathcal{B}_{\mathrm{con}}$ が clopen であることは明らか. □

**系 2.25.** $X$ を spectral 空間とするとき，$\mathcal{F}_{\mathrm{con}} = \{U \cup V \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X),\, V \in \overline{\mathcal{K}}(X)\}$ は $X_{\mathrm{con}}$ の閉基をなす．

*Proof.* $\{X \setminus F \mid F \in \mathcal{F}_{\mathrm{con}}\} = \mathcal{B}_{\mathrm{con}}$ が開基だから，$\mathcal{F}_{\mathrm{con}}$ は閉基である． □

**命題 2.26.** $T_0$ な pre-spectral 空間 $X$ に対して，

$$X \text{ は sober} \iff X_{\mathrm{con}} \text{ は quasi-compact}$$

が成り立つ．特に $X$ が spectral 空間のとき．$X_{\mathrm{con}}$ は quasi-compact である．

*Proof.* $(\Leftarrow)$: $X_{\mathrm{con}}$ は quasi-compact とし，$C \subseteq X$ を空でない既約閉集合とする．$X$ は $T_0$ だから，命題 2.5 より $C$ が生成点を持つことを示せばよい．

$$\mathcal{U}_C = \{U \cap C \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X),\, U \cap C \neq \emptyset\}$$

とおく．$C$ も $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ も $X_{\mathrm{con}}$ の閉集合だから，$\mathcal{U}_C$ は $X_{\mathrm{con}}$ の閉集合族である．$U_1, \ldots, U_n \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ に対して $U_i \cap C \neq \emptyset$ であるとする．このとき $C \not\subseteq U_i^c$ であり，$C$ は既約だから $C \not\subseteq U_1^c \cup \cdots \cup U_n^c$ が成り立ち，$(U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap C \neq \emptyset$ となる．$U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ だから $(U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap C \in \mathcal{U}_C$ となる．このことから $\mathcal{U}_C$ は有限交差性をもつことがわかる．このとき $X_{\mathrm{con}}$ が quasi-compact であることから $\mathcal{U}_C$ は交差し，$\bigcap \mathcal{U}_C \neq \emptyset$ である．$x \in \bigcap \mathcal{U}_C$ をとると，$x \in C$ より，$\overline{\{x\}} \subseteq C$ である．もし $\overline{\{x\}} \subsetneq C$ であるとすると，ある $y \in C \setminus \overline{\{x\}}$ が取れて，さらに $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ は $X$ の開基だから，$y \in U' \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$ なる $U' \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ が存在する．このとき $y \in U' \cap C$ より $U' \cap C \neq \emptyset$ で，よって $U' \cap C \in \mathcal{U}_C$ となるので，$x \in U' \cap C$ が従うが，これは $x \notin U'$ に反する．したがって $C = \overline{\{x\}}$ となり，$C$ は生成点をもつ．

$(\Rightarrow)$: 系 2.25 より

$$\mathcal{F}_{\mathrm{con}} = \{U \cup V \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X),\, V \in \overline{\mathcal{K}}(X)\}$$

は $X_{\mathrm{con}}$ の閉基である．よって $X_{\mathrm{con}}$ が quasi-compact であることを示すには，有限交差性をもつ任意の $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_{\mathrm{con}}$ に対して，$\mathcal{U}$ が交差することを示せばよい．有限交差性をもつ $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_{\mathrm{con}}$ をとり

$$\Sigma = \{\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{F}_{\mathrm{con}} \mid \mathcal{U}' \text{ は } \mathcal{U} \text{ を含み，有限交差性をもつ}\}$$

と置く．$\Sigma$ は包含に関して空でない帰納的半順序集合となるから，Zorn の補題より極大元 $\mathcal{M} \in \Sigma$ が存在する．$\mathcal{M}$ が交差すれば $\mathcal{U}$ も交差するから，$\mathcal{U} = \mathcal{M}$，つまり $\mathcal{U}$ は $\Sigma$ の極大元であるとしてよい．極大性から $X \in \mathcal{U}$ となることに注意する．このとき

$$\forall F, F' \in \mathcal{F}_{\mathrm{con}}, \quad F \cup F' \in \mathcal{U} \implies F \in \mathcal{U} \text{ または } F' \in \mathcal{U} \tag{a}$$

が成り立つ．

$\because$) $F, F' \notin \mathcal{U}$ であるとすると，$\mathcal{U}$ の極大性より $\mathcal{U} \cup \{F\}$ および $\mathcal{U} \cup \{F'\}$ は有限交差性をもたず，

$$F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap F = \emptyset, \quad F'_1 \cap \cdots \cap F'_m \cap F' = \emptyset$$

となる $F_1, \ldots, F_n, F'_1, \ldots, F'_m \in \mathcal{U}$ が存在する．このとき

$$F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap F'_1 \cap \cdots \cap F'_m \cap (F \cup F') = \emptyset$$

であるから $F \cup F' \notin \mathcal{U}$ となる．

また

$$C = \bigcap \{V \mid V \in \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{K}}(X)\}$$

とおくとき，

$$\forall U \in \mathring{\mathcal{K}}(X), \quad U \in \mathcal{U} \iff C \cap U \neq \emptyset \tag{b}$$

が成り立つ．

$\because$) $U \in \mathcal{U}$ とする．$\mathcal{V} = \{U \cap V \mid V \in \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{K}}(X)\}$ を考えると，$\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathcal{U}$ より $\mathcal{V}$ は有限交差性をもつ．$\mathcal{V}$ は，$X$ の部分空間としての $U$ の閉集合族であるから，$U$ の quasi-compact 性より，$C \cap U = \bigcap \mathcal{V} \neq \emptyset$ となる．

一方，$U \notin \mathcal{U}$ とする．$U, X \setminus U \in \mathcal{F}_{\mathrm{con}}$ に対して $U \cup (X \setminus U) = X \in \mathcal{U}$ だから，(a) より $X \setminus U \in \mathcal{U}$ を得る．$X \setminus U \in \overline{\mathcal{K}}(X)$ であるから，$C \subseteq X \setminus U$，すなわち $C \cap U = \emptyset$ となる．

特に $X \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ に対して $X \in \mathcal{U}$ より $C = C \cap X \neq \emptyset$ である．次に $C$ が既約であることを示そう．$U_1, U_2 \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ に対して $C \cap U_1 \neq \emptyset$ かつ $C \cap U_2 \neq \emptyset$ であるとする．すると (b) より $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ であり，また (S3) より $U_1 \cap U_2 \in \mathring{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathcal{F}_{\mathrm{con}}$ である．よって $\mathcal{U}$ の極大性から $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ がわかり，再び (b) から $C \cap (U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$ となる．よって $C$ は既約である．

よって $C$ は空でない既約な閉集合であるから，$X$ の sober 性より生成点 $x \in C$ が存在して $C = \overline{\{x\}}$ となる．$\mathcal{U}$ の任意の元 $U \cup V \in \mathcal{U}$ ($U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$，$V \in \overline{\mathcal{K}}(X)$) に対して，(a) より $U \in \mathcal{U}$ または $V \in \mathcal{U}$ である．$V \in \mathcal{U}$ のときは，$x \in C \subseteq V \subseteq U \cup V$ となる．$U \in \mathcal{U}$ のとき，(b) より $\overline{\{x\}} \cap U = C \cap U \neq \emptyset$ であるから $x \in U \subseteq U \cup V$ となる．さたがって $x \in \bigcap \mathcal{U}$ となり $\mathcal{U}$ は交差する．以上より $X_{\mathrm{con}}$ は quasi-compact である． □

> **系 2.27.** spectral 空間 $X$ に対して，位相空間 $X_{\mathrm{con}}$ はストーン空間である．特にまた $X_{\mathrm{con}}$ は spectral 空間である．

*Proof.* 命題 2.23，命題 2.26 より $X_{\mathrm{con}}$ は Hausdorff かつ quasi-compact であり，また命題 2.24 より clopen 集合からなる開基をもつから，命題 2.17 より $X_{\mathrm{con}}$ はストーン空間となる． □

**命題 2.28.** spectral 空間 $X, Y$ に対して，写像 $f\colon X \to Y$ が spectral 写像であることは，$f$ が spectral 位相と constructible 位相の両方に関して連続であることと同値である．

*Proof.* ($\Rightarrow$): $f$ が spectral 写像であるとき，命題 2.13 より spectral 位相に関して連続である．また $U \in \mathring{\mathcal{K}}(Y)$，$V \in \overline{\mathcal{K}}(Y)$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$，$f^{-1}(V) \in \overline{\mathcal{K}}(X)$ となるから，constructible 位相に関しても連続である．

($\Leftarrow$): $Y$ の quasi-compact な開集合 $U \in \mathring{\mathcal{K}}(Y)$ を任意にとる．$f$ は spectral 位相に関して連続だから，$f^{-1}(U) \subseteq X$ は spectral 位相での開集合である．また $U \subseteq Y_{\mathrm{con}}$ は constructible 位相で閉集合であるから，$f$ が constructible 位相でも連続であることより，$f^{-1}(U) \subseteq X_{\mathrm{con}}$ は constructible 位相で閉集合である．命題 2.26 より $X_{\mathrm{con}}$ は quasi-compact だから閉集合 $f^{-1}(U) \subseteq X_{\mathrm{con}}$ も quasi-compact で，命題 2.22 より $\mathrm{id}\colon X_{\mathrm{con}} \to X$ が連続だから $f^{-1}(U) \subseteq X$ は spectral 位相に関しても quasi-compact である．よって $f$ は spectral 写像である． □

命題 2.28 より，spectral 写像 $f\colon X \to Y$ があったとき，写像 $f$ は constructible 位相に関しても連続となる．この連続写像を $f_{\mathrm{con}}\colon X_{\mathrm{con}} \to Y_{\mathrm{con}}$ と表す．系 2.27 とこの対応によって，関手

$$(-)_{\mathrm{con}}\colon \mathsf{Spectral} \to \mathsf{Stone}$$

が定まる．

2.2 小節の最後で，ストーン空間が spectral 空間であることをみた．包含関手を $\mathrm{incl}\colon \mathsf{Stone} \hookrightarrow \mathsf{Spectral}$ とする．このとき，上記の関手 $(-)_{\mathrm{con}}$ は $\mathsf{Stone} \hookrightarrow \mathsf{Spectral}$ の右随伴として特徴づけられることを確認しよう．

spectral 空間 $X$ に対して，命題 2.22 より

$$\mathrm{con}_X \coloneqq \mathrm{id}_X\colon X_{\mathrm{con}} = \mathrm{incl}(X_{\mathrm{con}}) \to X$$

は連続写像であった．

**補題 2.29.** $X$ を spectral 空間とする．

(i) $\mathrm{con}_X\colon X_{\mathrm{con}} \to X$ は spectral 写像である．

(ii) $\mathrm{con}_X$ は $X$ について自然であり，自然変換

$$\mathrm{con}\colon \mathrm{incl} \circ (-)_{\mathrm{con}} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{Spectral}}$$

をなす．

(iii) $X$ がストーン空間のとき，$\mathrm{con}_X$ は同型 $X_{\mathrm{con}} \cong X$ を与える．

(iv) 任意のストーン空間 $Y$ と spectral 写像 $f\colon Y \to X$ に対して，

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, dashed, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X_{\mathrm{con}} \arrow[r, "\mathrm{con}_X"'] & X \end{tikzcd}$$

を可換にする spectral 写像 $g\colon Y \to X_{\mathrm{con}}$ が一意的に存在する．

*Proof.* (i) $X$ の quasi-compact な開集合 $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ は，$X_{\mathrm{con}}$ の位相で clopen 集合であり，$X_{\mathrm{con}}$ はストーン空間であるから $U \in \mathrm{clop}(X_{\mathrm{con}}) = \mathring{\mathcal{K}}(X_{\mathrm{con}})$ となる．したがって $\mathrm{con}_X$ は spectral 写像となる．

(ii) は容易．

(iii) $X$ がストーン空間のとき，$\mathrm{clop}(X) = \mathring{\mathcal{K}}(X)$ であり故に $\mathrm{clop}(X) = \overline{\mathcal{K}}(X)$ でもあるから，$X_{\mathrm{con}}$ の位相は $\mathrm{clop}(X) = \mathring{\mathcal{K}}(X) \cup \overline{\mathcal{K}}(X)$ を開基とする位相である．これは $X$ のもともとの位相に一致するから $X_{\mathrm{con}} \cong X$ である．

(iv) $g$ を合成 $Y \cong Y_{\mathrm{con}} \xrightarrow{f_{\mathrm{con}}} X_{\mathrm{con}}$ と置けばよい．一意性も明らか． □

補題 2.29 (iv) より，spectral 空間 $X$ とストーン空間 $Y$ に対して，全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Spectral}}(\mathrm{incl}(Y), X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Stone}}(Y, X_{\mathrm{con}})$$

が得られる．これは $X$ と $Y$ について自然であることがわかり，したがって $(-)_{\mathrm{con}}$ は包含関手 $\mathrm{incl}\colon \mathsf{Stone} \hookrightarrow \mathsf{Spectral}$ の右随伴となる．このことから，圏 Stone は圏 Spectral の余反映的充満部分圏 (coreflective full subcategory) となる[*4]．

## 2.4 Inverse 位相

constructible 位相の他に，spectral 空間上で考える位相に inverse 位相がある．

**定義 2.30.** 位相空間 $X$ に対して，$\mathring{\mathcal{K}}(X)$ を閉基とする (すなわち $\overline{\mathcal{K}}(X)$ を開基とする) $X$ 上の位相を inverse topology という．

$X$ 上に inverse 位相をのせて位相空間としたものを $X$ の inverse 空間といい，$X_{\mathrm{inv}}$ と表す．

**例 2.31.** (i) Sierpiński 空間 $\mathbb{2} = (2, \{\emptyset, \{0\}, 2\})$ に対して，$\mathbb{2}_{\mathrm{inv}} = (2, \{\emptyset, \{1\}, 2\})$ である．

(ii) ストーン空間 $X$ に対しては，明らかに $X_{\mathrm{inv}} = X$ である．

**補題 2.32.** spectral 空間 $X$ に対して，$\overline{\mathcal{K}}(X)$ は分配束で，

$$\mathring{\mathcal{K}}(X_{\mathrm{inv}}) = \overline{\mathcal{K}}(X)$$

が成り立つ．

*Proof.* $X$ が spectral 空間なら，$\mathring{\mathcal{K}}(X)$ は分配束であるから，$\overline{\mathcal{K}}(X)$ も分配束をなす．

$X$ の patch 空間 $X_{\mathrm{con}}$ と inverse 空間 $X_{\mathrm{inv}}$ の定義から，$\mathrm{id}_X\colon X_{\mathrm{con}} \to X_{\mathrm{inv}}$ は連続である．このことから，$X_{\mathrm{con}}$ の閉集合は inverse 位相で quasi-compact である．特に，$V \in \overline{\mathcal{K}}(X)$ は $X_{\mathrm{inv}}$ の

[*4] 反映的 (reflective) となることも知られている ([DST19, 6.6.8])．

quasi-compact な開集合であり，$\overline{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(X_{\mathrm{inv}})$ とわかる．$\overline{\mathcal{K}}(X)$ は $X_{\mathrm{inv}}$ の開基で有限の和集合で閉じるから，命題 2.11 より $\overline{\mathcal{K}}(X) = \mathring{\mathcal{K}}(X_{\mathrm{inv}})$ が成り立つ． □

**定理 2.33.** spectral 空間 $X$ に対して，$X_{\mathrm{inv}}$ は spectral 空間となる．

*Proof.* 補題 2.32 より，$X_{\mathrm{inv}}$ は条件 (S2), (S3) をみたす．特に $X \in \overline{\mathcal{K}}(X) = \mathring{\mathcal{K}}(X_{\mathrm{inv}})$ より $X_{\mathrm{inv}}$ は quasi-compact であり，条件 (S1) もみたす．また，$X$ が $T_0$ であることから $X_{\mathrm{inv}}$ も $T_0$ であることがわかる．

さらに，$X$ の patch 空間 $X_{\mathrm{con}}$ と inverse 空間 $X_{\mathrm{inv}}$ の定義から，

$$(X_{\mathrm{inv}})_{\mathrm{con}} = X_{\mathrm{con}}$$

が成り立ち，$X$ が spectral 空間であることから $(X_{\mathrm{inv}})_{\mathrm{con}}$ は quasi-compact となる．したがって命題 2.26 より，$X_{\mathrm{inv}}$ は sober で，条件 (S4) をみたす． □

spectral 写像 $f\colon X \to Y$ があったとき，写像 $f$ は inverse 位相に関しても spectral 写像となる．この spectral 写像を $f_{\mathrm{inv}}\colon X_{\mathrm{inv}} \to Y_{\mathrm{inv}}$ と表す．定理 2.33 とこの対応によって，関手

$$(-)_{\mathrm{inv}}\colon \mathsf{Spectral} \to \mathsf{Spectral}$$

が定まる．補題 2.32 より

$$(-)_{\mathrm{inv}} \circ (-)_{\mathrm{inv}} = \mathrm{Id}_{\mathsf{Spectral}}$$

が成り立つことがわかる．したがって $(-)_{\mathrm{inv}}$ は圏 Spectral の自己同型関手である．

inverse 位相は Hochster [Hoc69] によってはじめて導入され，関手 $(-)_{\mathrm{inv}}$ が同型である，特に spectral 空間 $X$ に対して $(X_{\mathrm{inv}})_{\mathrm{inv}} = X$ が成り立つ事実は，Hochster 双対性 (Hochster duality) と呼ばれる ([Koc07]).

## 2.5 Spectral 部分空間

**定義 2.34.** $X$ を spectral 空間とする．部分集合 $Y \subseteq X$ が spectral subspace であるとは，$Y$ が $X$ の相対位相で spectral 空間となり，かつ包含写像 $Y \hookrightarrow X$ が spectral 写像であるときをいう．

**命題 2.35.** spectral 空間 $X$ の部分集合 $Y \subseteq X$ に対して，$X$ の相対位相を入れて $Y$ を位相空間とするとき，

$$Y \text{ は } X \text{ の spectral subspace} \iff Y \subseteq X_{\mathrm{con}} \text{ は constructible 位相で閉集合}$$

が成り立ち，このとき

$$\mathring{\mathcal{K}}(Y) = \{U \cap Y \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)\}$$

である．特に $X_{\mathrm{con}}$ の閉集合は spectral 位相で quasi-compact である．

*Proof.* $(\Rightarrow)$: $Y \subseteq X$ が spectral subspace であるとき，命題 2.26 より $Y_{\mathrm{con}}$ は quasi-compact であり，包含写像 $Y_{\mathrm{con}} \hookrightarrow X_{\mathrm{con}}$ は連続だから，$Y \subseteq X_{\mathrm{con}}$ は constructible 位相で quasi-compact である．命題 2.23 より $X_{\mathrm{con}}$ は Hausdorff であるから，$Y$ は $X_{\mathrm{con}}$ の閉集合である．

$(\Leftarrow)$: $Y$ が $X_{\mathrm{con}}$ の閉集合であるとする．$X_{\mathrm{con}}$ が quasi-compact だから $Y$ は constructible 位相で quasi-compact で，命題 2.22 より spectral 位相でも quasi-compact である．このとき部分空間 $Y \subseteq X$ について $\mathring{\mathcal{K}}(Y) = \{U \cap Y \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)\}$ が成り立つ．

∵) $(\supseteq)$: 各 $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ は $X_{\mathrm{con}}$ の閉集合だから $U \cap Y$ も $X_{\mathrm{con}}$ の閉集合である．よって $U \cap Y$ は constructible 位相で quasi-compact な部分集合であり，spectral 位相でも quasi-compact な部分集合となる．$U \cap Y$ は $Y$ の開集合だから，$U \cap Y \in \mathring{\mathcal{K}}(Y)$ である．

$(\subseteq)$: $V \in \mathring{\mathcal{K}}(Y)$ に対し，$\{U \cap Y \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)\}$ は部分空間 $Y$ の開基をなしているから

$$\exists U_i \in \mathring{\mathcal{K}}(X), \quad V = \bigcup_i (U_i \cap Y)$$

となる．$V$ は $Y$ の quasi-compact な部分集合だから，添え字 $i$ は有限個としてよく，$i = 1, \ldots, n$ とすると

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap Y) = \left( \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right) \cap Y$$

となる．$\mathring{\mathcal{K}}(X)$ は有限の和集合で閉じるから $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ であるので，$V \in \{U \cap Y \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)\}$ となる．

このことから $Y$ は $X$ の相対位相で (S1)–(S3) をみたすことがわかる．あとは $Y$ が sober であることを示せばよい．

$\emptyset \neq C \subseteq Y$ を空でない既約閉集合とすると，$X$ の閉集合 $F$ を用いて $C = Y \cap F$ と表せる．$Y$ は $X_{\mathrm{con}}$ の閉集合で，$F$ も $X_{\mathrm{con}}$ の閉集合だから，$C$ は $X_{\mathrm{con}}$ の閉集合となる．さらに $C$ は $X$ の既約集合でもあるから

$$\mathcal{U} = \{U \cap C \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X),\, U \cap C \neq \emptyset\}$$

は有限交差性をもつ．$\mathcal{U}$ は $X_{\mathrm{con}}$ の閉集合族であり，命題 2.26 より $X_{\mathrm{con}}$ は quasi-compact であるから，$\mathcal{U}$ は交差し，$x \in \bigcap \mathcal{U} \subseteq C$ なる元 $x \in Y$ が存在する．$C$ は $Y$ の閉集合だから $\overline{\{x\}}^{Y} = \overline{\{x\}} \cap Y \subseteq C$ であり，また $\mathcal{U}$ の定義から $C \subseteq \overline{\{x\}}$ もわかる (ここで $\overline{\{x\}}$ は $X$ の spectral 位相での閉包を表し，$\overline{\{x\}}^{Y}$ は $Y$ の相対位相での閉包を表す)．

∵) $C \not\subseteq \overline{\{x\}}$ であるとすると，$c \notin \overline{\{x\}}$ となる $c \in C$ が存在する．このとき $X$ の開集合 $X \setminus \overline{\{x\}}$ は $c$ の開近傍であり，$\mathring{\mathcal{K}}(X)$ が $X$ の開基をなすことから，$c \in U \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$ となる $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ がとれる．すると $U \cap C \neq \emptyset$ より $U \cap C \in \mathcal{U}$ であり，したがって $x \in \bigcap \mathcal{U} \subseteq U \cap C \subseteq U$ となるが，これは $x \notin U$ に矛盾する．よって $C \subseteq \overline{\{x\}}$ が成り立つ．

よって $C = \overline{\{x\}}^Y$ となる．$X$ が $T_0$ であるから $Y$ も $T_0$ で，よって命題 2.5 より，$Y$ は sober である．

以上より $Y$ は $X$ の相対位相で spectral 空間であり，また $\mathring{\mathcal{K}}(Y) = \{U \cap Y \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)\}$ より包含写像 $Y \hookrightarrow X$ は spectral 写像となるから，$Y$ は $X$ の spectral subspace である． $\square$

# 3　Stone 双対性

ブール代数の圏とストーン空間の圏の間に反変な圏同値があることはよく知られているが，この双対性はより広く (有界な) 分配束と spectral 空間の間にも成り立つ．

## 3.1　分配束のスペクトラム

分配束に対して spectral 空間を構成しよう．

二元集合 $2 = \{0, 1\}$ に Sierpiński 位相 $\{\emptyset, \{0\}, 2\}$ を入れて spectral 空間としたものを $\mathbb{2}$ と表す．集合 $L$ の元 $a$ と直積空間 $\mathbb{2}^L$ に対して，$\mathbb{2}^L$ の $a$ 成分への射影を $p_a \colon \mathbb{2}^L \to \mathbb{2}$ で表す．直積位相の定義から $p_a$ は連続写像である．

> **補題 3.1.** 集合 $L$ に対して，直積空間 $\mathbb{2}^L$ は spectral 空間である．またこのとき
>
> (i) $\mathring{\mathcal{K}}(\mathbb{2}^L) = \{\bigcup_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^m {p_{a_{ij}}}^{-1}(0) \mid a_{ij} \in L,\ n, m \in \mathbb{N}\}$
> (ii) $(\mathbb{2}^L)_{\mathrm{con}} = (\mathbb{2}_{\mathrm{con}})^L$
> (iii) $(\mathbb{2}^L)_{\mathrm{inv}} = (\mathbb{2}_{\mathrm{inv}})^L$
>
> が成り立つ．

*Proof.* 直積空間 $\mathbb{2}^L$ の元 $v$ を写像 $v \colon L \to \mathbb{2}$ と同一視する．要素 $a \in L$ に対して

$$V_a \coloneqq \{v \in \mathbb{2}^L \mid v(a) = 0\}$$

とおくと，$V_a = p_a^{-1}(0)$ よりこれは $\mathbb{2}^L$ の開集合である．$V_a$ は $a$ 成分が $\{0\}$ になっている $\mathbb{2}^L$ の部分集合

$$V_a = \cdots \times \mathbb{2} \times \{0\} \times \mathbb{2} \times \cdots \cong \mathbb{2}^{L \setminus \{a\}}$$

という形をしていて，Tychonoff の定理より $V_a$ は quasi-compact である．

(S1): Tychonoff の定理より $\mathbb{2}^L$ は quasi-compact である．

(S2): 直積位相の定義から，$\mathbb{2}^L$ は

$$\mathcal{B} = \{p_{a_1}^{-1}(0) \cap \cdots \cap p_{a_m}^{-1}(0) \mid a_1, \ldots, a_m \in L,\ m \in \mathbb{N}\}$$

を開基にもつが，

$$p_{a_1}^{-1}(0) \cap \cdots \cap p_{a_m}^{-1}(0) \cong \mathbb{2}^{L \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}}$$

であるから，Tychonoff の定理より開基 $\mathcal{B}$ は $\mathcal{B} \subseteq \mathring{\mathcal{K}}(\mathbb{2}^L)$ をみたす．

(S3): $U \in \mathring{\mathcal{K}}(\mathbb{2}^L)$ をとると，$\mathcal{B}$ は開基だから $U = \bigcup_i B_i$ となる $B_i \in \mathcal{B}$ が存在する．$U$ は quasi-compact であるから，そのなかの有限個 $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ が存在して $U = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ となる．したがって

$$\mathring{\mathcal{K}}(\mathbb{2}^L) = \left\{ \bigcup_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^m p_{a_{ij}}^{-1}(0) \;\middle|\; a_{ij} \in L,\ n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

が成り立つ．これより $\mathring{\mathcal{K}}(2^L)$ は有限個の和集合で閉じる．

(S4): $2^L$ の異なる二点 $v \neq u$ に対し $v(a) \neq u(a)$ なる $a \in L$ をとると，$v(a) = 1, u(a) = 0$ または $v(a) = 0, u(a) = 1$，すなわち $v \notin V_a, u \in V_a$ または $v \in V_a, u \notin V_a$ が成り立ち，$2^L$ は $T_0$ である．よって $(2^L)_{\mathrm{con}} = (2_{\mathrm{con}})^L$ が示せれば，Tychonoff の定理と命題 2.26 より $2^L$ が sober であることがわかる．

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{K}}(2^L) &= \{X \setminus U \mid U \in \mathring{\mathcal{K}}(2^L)\} \\ &= \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} p_{a_{ij}}^{-1}(1) \;\middle|\; a_{ij} \in L,\ n, m \in \mathbb{N} \right\}\end{aligned}$$

であり，これより $(2^L)_{\mathrm{con}}$ は

$$\left\{ p_{a_1}^{-1}(0) \cap \cdots \cap p_{a_m}^{-1}(0) \cap p_{b_1}^{-1}(1) \cap \cdots \cap p_{b_n}^{-1}(1) \mid a_j, b_i \in L,\ n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

を開基にもつことがわかる．これは $(2_{\mathrm{con}})^L$ の開基に一致し

$$(2^L)_{\mathrm{con}} = (2_{\mathrm{con}})^L$$

がわかる．

したがって $2^L$ は pectral 空間である．またこのとき，明らかに $(2^L)_{\mathrm{inv}} = (2_{\mathrm{inv}})^L$ も成り立つ．(i)，(ii) はすでに示した． □

より一般に，spectral 空間の任意の直積空間はまた spectral 空間であり，$(-)_{\mathrm{con}}$ や $(-)_{\mathrm{inv}}$ は直積をとる操作と交換することが知られている ([DST19, Theorem 2.2.1])．

分配束があったとき，その 2 への準同型全体を考えることのよって spectral 空間が得られることをみよう．ここで 2 には順序 $0 < 1$ によって有界な分配束とみなしている．

> **命題 3.2.** 分配束 $L$ に対して，分配束 2 への準同型の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2)$ は spectral 空間 $2^L$ の spectral subspace である．

*Proof.* 命題 2.35 より，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2)$ が $(2^L)_{\mathrm{con}} = (2_{\mathrm{con}})^L$ の閉集合であることを示せばよい．$v \in (2^L)_{\mathrm{con}} \setminus \mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2)$ をとる．写像 $v \colon L \to 2$ とみなすと，これは束準同型でないから，

(a) $v(1) = 0$
(b) $v(0) = 1$
(c) $\exists a, b \in L, \quad v(a \wedge b) \neq v(a) \wedge v(b)$
(d) $\exists a, b \in L, \quad v(a \vee b) \neq v(a) \vee v(b)$

のいずれかが成り立つ．それぞれの場合で，部分集合 $U \subseteq 2^L$ を

(a) $U = p_1^{-1}(0)$

(b) $U = p_0^{-1}(1)$
(c) $U = \left(p_{a\wedge b}^{-1}(0) \cap p_a^{-1}(1) \cap p_b^{-1}(1)\right) \cup \left(p_{a\wedge b}^{-1}(1) \cap \left(p_a^{-1}(0) \cup p_b^{-1}(0)\right)\right)$
(d) $U = \left(p_{a\vee b}^{-1}(0) \cap \left(p_a^{-1}(1) \cup p_b^{-1}(1)\right)\right) \cup \left(p_{a\vee b}^{-1}(1) \cap p_a^{-1}(0) \cap p_b^{-1}(0)\right)$

とおけば，$U$ は $(\mathbb{2}^L)_{\mathrm{con}}$ の開集合で

$$v \in U, \quad U \cap \mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2) = \emptyset$$

が成り立つ．したがって $\mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2) \subseteq (\mathbb{2}^L)_{\mathrm{con}}$ は閉集合となる． □

こうして分配束 $L$ に対して，spectral 空間 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2)$ が得られた．命題 2.35 と補題 3.1 から

$$\mathring{\mathcal{K}}(\mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2)) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} V_{a_{ij}} \cap \mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2) \;\middle|\; a_{ij} \in L,\ n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

とわかる．

分配束の間の準同型 $\phi \colon L \to M$ に対して，写像

$$\phi^* \colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(M, 2) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2); \quad \lambda \mapsto \lambda \circ \phi$$

を考えると，各 $a \in L$ に対して

$$(\phi^*)^{-1}(V_a \cap \mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2)) = V_{\phi(a)} \cap \mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(M, 2)$$

が成り立つから，$\phi^*$ は spectral 写像になる．

これらの対応により，反変関手

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(-, 2) \colon \mathsf{DLat}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Spectral}$$

が定まる．

**定義 3.3.** 関手 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(-, 2)$ と $(-)_{\mathrm{inv}}$ の合成を

$$\mathrm{Spec} \coloneqq (-)_{\mathrm{inv}} \circ \mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(-, 2) \colon \mathsf{DLat}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Spectral}$$

とおく．分配束 $L$ に対して，$\mathrm{Spec}(L) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2)_{\mathrm{inv}}$ を $L$ のスペクトラム (spectrum) という．

inverse 空間を取っているのは，Stone 双対で束の順序の方向を合わせるためである．

**命題 3.4.** 分配束 $L$ において

$$D(a) \coloneqq \{v \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2) \mid v(a) = 1\} \subseteq \mathrm{Spec}(L)$$

とおくとき，

(i) $D(a) \cap D(b) = D(a \wedge b)$

(ii) $D(a) \cup D(b) = D(a \vee b)$

(iii) $\mathring{\mathcal{K}}(\mathrm{Spec}(L)) = \{D(a) \mid a \in L\}$

が成り立つ．

*Proof.* (i)，(ii) は明らかである．定義から

$$\mathrm{Spec}(L) \setminus D(a) = V_a \cap \mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2)$$

が成り立つから，(i)，(ii) を使えば

$$\mathring{\mathcal{K}}(\mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2)) = \{\mathrm{Spec}(L) \setminus D(a) \mid a \in L\}$$

となる．よって

$$\mathring{\mathcal{K}}(\mathrm{Spec}(L)) = \overline{\mathcal{K}}(\mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2)) = \{D(a) \mid a \in L\}$$

とわかる． □

### 3.2 Stone 双対

Stone 双対性を証明しよう．双対性を与える関手の表示は何組もあるが，ここではその一つだけを取り上げる．双対性を与える関手のさまざまな表示は，用いられる場面に応じて使い分けられる．

**補題 3.5.** $L, M$ を分配束とし，$\phi\colon L \to M$ を束準同型とする．

(i) 写像

$$\varepsilon_L\colon L \to \mathring{\mathcal{K}}(\mathrm{Spec}(L))\,; \quad a \mapsto D(a)$$

は束の同型を与える．

(ii) 族 $(\varepsilon_L)_{L \in \mathsf{DLat}}$ は自然性

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\varepsilon_L"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathring{\mathcal{K}}(\mathrm{Spec}(L)) \arrow[d, "\mathring{\mathcal{K}}(\mathrm{Spec}(\phi))"] \\
M \arrow[r, "\varepsilon_M"'] & \mathring{\mathcal{K}}(\mathrm{Spec}(M))
\end{tikzcd}$$

をみたし，自然変換

$$\varepsilon\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{DLat}} \Rightarrow \mathring{\mathcal{K}} \circ \mathrm{Spec}$$

をなす．

*Proof.* (i) $\varepsilon_L$ が全射な束準同型であることは命題 3.4 から明らか．$a, b \in L$ に対して $a \neq b$ とすると，$a \not\leq b$ または $b \not\leq a$ が成り立つ．いずれにせよ系 1.16 より $v(a) \neq v(b)$ なる束準同型 $v \colon L \to 2$ が存在し，$D(a) \neq D(b)$ となる．よって $\varepsilon_L$ は単射であり，束の同型を与える．

(ii) 各 $a \in L$ に対して，

$$\begin{aligned} v \in (\phi^*)^{-1}(D(a)) &\iff \phi^*(v)(a) = (v \circ \phi)(a) = 1 \\ &\iff v \in D(\phi(a)) \end{aligned}$$

となるから，上の図式は可換である． □

$X$ を spectral 空間とする．$x \in X$ に対して，写像 $\mathrm{ev}_x \colon \mathring{\mathcal{K}}(X) \to 2$ を

$$\mathring{\mathcal{K}}(X) \ni U \quad \mapsto \quad \mathrm{ev}_x(U) = \begin{cases} 1 & (x \in U) \\ 0 & (x \notin U) \end{cases}$$

によって定めると，$\mathrm{ev}_x$ は束準同型である．

**補題 3.6.** $X, Y$ を spectral 空間とし，$f \colon X \to Y$ を spectral 写像とする．

(i) 写像

$$\eta_X \colon X \to \mathrm{Spec}(\mathring{\mathcal{K}}(X))\,; \quad x \mapsto \mathrm{ev}_x$$

は spectral 空間の同型を与える．

(ii) 族 $(\eta_X)_{X \in \mathsf{Spectral}}$ は自然性

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Spec}(\mathring{\mathcal{K}}(X)) \arrow[d, "\mathrm{Spec}(\mathring{\mathcal{K}}(f))"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & \mathrm{Spec}(\mathring{\mathcal{K}}(Y)) \end{tikzcd}$$

をみたし，自然変換

$$\eta \colon \mathrm{Id}_{\mathsf{Spectral}} \Rightarrow \mathrm{Spec} \circ \mathring{\mathcal{K}}$$

をなす．

*Proof.* (i) まず $\mathrm{Spec}(\mathring{\mathcal{K}}(X))$ の quasi-compact な開集合 $D(U) = \{v \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(\mathring{\mathcal{K}}(X), 2) \mid v(U) = 1\}$ $(U \in \mathring{\mathcal{K}}(X))$ に対して，

$$\begin{aligned} (\eta_X)^{-1}(D(U)) &= \{x \in X \mid \mathrm{ev}_x(U) = 1\} \\ &= \{x \in X \mid x \in U\} = U \in \mathring{\mathcal{K}}(X) \end{aligned}$$

となるから，$\eta_X$ は spectral 写像である．次に $x, y \in X$ に対して $\mathrm{ev}_x = \mathrm{ev}_y$ であるとすると，$y \in U$ となる任意の $U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ に対して $\eta_X(x) = \mathrm{ev}_x = \mathrm{ev}_y \in D(U)$ より $x \in (\eta_X)^{-1}(D(U)) = U$ となることから，$X$ の $T_0$ 性より $x = y$，つまり $\eta_X$ は単射である．

$\eta_X$ が全射であることを示そう．$v \in \mathrm{Spec}(\mathring{\mathcal{K}}(X))$ を任意にとると，$v^{-1}(0)$ は $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ の素イデアルである．このとき，

$$C = X \setminus \bigcup_{U \in v^{-1}(0)} U$$

は既約閉集合となる．

$\because$) $v^{-1}(0) = \{V \in \mathring{\mathcal{K}}(X) \mid V \cap C = \emptyset\}$ が成り立つことに注意する．

$\because$) $v^{-1}(0) \subseteq \{V \in \mathring{\mathcal{K}}(X) \mid V \cap C = \emptyset\}$ は明らか．$V \cap C = \emptyset$ なる $V \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ に対して，$V \subseteq \bigcup_{U \in v^{-1}(0)} U$ となるから，$V$ の quasi-compact 性より有限個の $U_1, \ldots, U_n \in v^{-1}(0)$ が存在して $V \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$ となる．このとき $v$ が束準同型であるから，$v(V) \leq v(U_1) \vee \cdots \vee v(U_n) = 0 \vee \cdots \vee 0 = 0$ となり，$v(V) = 0$ つまり $V \in v^{-1}(0)$ が成り立つ．

特に $X \notin v^{-1}(0)$ となるから，$C = X \cap C \neq \emptyset$ である．

$C$ が既約でないとすると，閉集合 $A_1, A_2 \subseteq X$ であって $C \not\subseteq A_i$ かつ $C \subseteq A_1 \cup A_2$ となるものが存在する．$C \not\subseteq A_i$ より，$c_i \in C \cap (X \setminus A_i)$ がとれる．$\mathring{\mathcal{K}}(X)$ は $X$ の開基だから，$c_i \in U_i \subseteq X \setminus A_i$ なる $U_i \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ がとれる．$C \cap U_i \neq \emptyset$ だから $U_i \notin v^{-1}(0)$ である．一方，$U_1 \cap U_2 \subseteq (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2) = X \setminus (A_1 \cup A_2)$ より

$$(U_1 \cap U_2) \cap C \subseteq (U_1 \cap U_2) \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$$

となるから，$U_1 \cap U_2 \in v^{-1}(0)$ となる．しかしこれでは $v^{-1}(0)$ が $\mathring{\mathcal{K}}(X)$ の素イデアルであることに矛盾する．よって $C$ は既約である．

よって $X$ の sober 性から，$C$ は一意な生成点 $x \in X$ をもつ．このとき $V \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ に対して

$$v(V) = 0 \iff V \in v^{-1}(0) \iff x \notin V \iff \mathrm{ev}_x(V) = 0$$

となるから，$v = \mathrm{ev}_x = \eta_X(x)$ が成り立つ．したがって $\eta_X$ は全射である．

$U \in \mathring{\mathcal{K}}(X)$ に対して $\eta_X(U) = D(U)$ であることから，$\eta_X$ の逆射も spectral 写像であり，したがって $\eta_X$ は spectral 空間の同型を与える．

(ii) 各 $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} \eta_Y(f(x))(V) = \mathrm{ev}_{f(x)}(V) = 1 &\iff f(x) \in V \\ &\iff x \in f^{-1}(V) \\ &\iff \eta_X(\mathring{\mathcal{K}}(f)(V)) = \mathrm{ev}_x(f^{-1}(V)) = 1 \end{aligned}$$

となるから，上の図式は可換である． □

**定理 3.7** (Stone 双対性)．分配束のなす圏 $\mathsf{DLat}$ と spectral 空間のなす圏 $\mathsf{Spectral}$ は反変圏同値である：

$$\mathsf{DLat}^{\mathrm{op}} \simeq \mathsf{Spectral}.$$

*Proof.* 補題 3.5, 3.6 より，関手 $\mathring{\mathcal{K}}\colon \mathsf{Spectral} \to \mathsf{DLat}^{\mathrm{op}}$ と $\mathrm{Spec}\colon \mathsf{DLat}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Spectral}$ が圏同値を与える． □

**系 3.8.** ブール代数のなす圏 $\mathsf{BLat}$ とストーン空間のなす圏 $\mathsf{Stone}$ は反変圏同値である：

$$\mathsf{BLat}^{\mathrm{op}} \simeq \mathsf{Stone}.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{DLat}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{Spectral} \\
\mathsf{BLat}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, hook] & \mathsf{Stone} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

*Proof.* $L$ がブール代数のとき，補題 3.5 より $\mathring{\mathcal{K}}(\mathrm{Spec}(L)) \cong L$ はブール代数となるから，定理 2.19 より $\mathrm{Spec}(L)$ はストーン空間である．よって $\mathrm{Spec}\colon \mathsf{DLat}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Spectral}$ は関手

$$\mathrm{Spec}\colon \mathsf{BLat}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Stone}$$

を誘導する．また $X$ がストーン空間のとき，$\mathring{\mathcal{K}}(X) = \mathrm{clop}(X)$ はブール代数となるから，$\mathring{\mathcal{K}}\colon \mathsf{Spectral} \to \mathsf{DLat}^{\mathrm{op}}$ は関手

$$\mathring{\mathcal{K}}\colon \mathsf{Stone} \to \mathsf{BLat}^{\mathrm{op}}$$

を誘導する．

このとき補題 3.5, 3.6 の $(\varepsilon_L)_{L\in\mathsf{BLat}}$ と $(\eta_X)_{X\in\mathsf{Stone}}$ によって，自然同型 $\mathrm{Id}_{\mathsf{BLat}} \cong \mathring{\mathcal{K}} \circ \mathrm{Spec}$, $\mathrm{Id}_{\mathsf{Stone}} \cong \mathrm{Spec} \circ \mathring{\mathcal{K}}$ が成り立ち，圏同値 $\mathsf{BLat}^{\mathrm{op}} \simeq \mathsf{Stone}$ を得る． □

圏同値を与える関手の表示は様々である．たとえば，補題 2.32 より

$$\mathring{\mathcal{K}}(\mathrm{Spec}(L)) = \overline{\mathcal{K}}(\mathrm{Spec}(L)_{\mathrm{inv}}) = \overline{\mathcal{K}}(\mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(L, 2))$$

であるから，関手

$$\overline{\mathcal{K}}\colon \mathsf{DLat}^{\mathrm{op}} \leftrightarrows \mathsf{Spectral} : \mathrm{Hom}_{\mathsf{DLat}}(-, 2)$$

も圏同値を与える．命題 1.14 を用いれば，素イデアルや素フィルターによる表示も得られる．

圏同値 $\mathsf{DLat}^{\mathrm{op}} \simeq \mathsf{Spectral}$ を通じて，関手 $(-)_{\mathrm{inv}}$ を解釈してみる．束 $L$ に対して，その順序と反対向きに順序をいれたものを $L_{\mathrm{inv}}$ とすると，$L_{\mathrm{inv}}$ には $L$ の束構造を反転した束の構造が入る．この対応によって関手

$$(-)_{\mathrm{inv}}\colon \mathsf{Lat} \to \mathsf{Lat}$$

が定まる．分配束のなす部分圏に制限することで

$$(-)_{\mathrm{inv}} \colon \mathsf{DLat} \to \mathsf{DLat}$$

も得られる．明らかに $(L_{\mathrm{inv}})_{\mathrm{inv}} = L$ であるから，$(-)_{\mathrm{inv}}$ は $\mathsf{Lat}$ ないし $\mathsf{DLat}$ の自己同型関手である．

$X$ を spectral 空間とすると，

$$\mathring{\mathcal{K}}(X)_{\mathrm{inv}} \cong \overline{\mathcal{K}}(X)$$

が成り立つことから，

$$X \cong \mathrm{Spec}(\mathring{\mathcal{K}}(X)) \cong \mathrm{Spec}(\overline{\mathcal{K}}(X))_{\mathrm{inv}} \cong \mathrm{Spec}(\mathring{\mathcal{K}}(X)_{\mathrm{inv}})_{\mathrm{inv}}$$

となる．このことから

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{DLat}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(-)_{\mathrm{inv}}"', "\wr"] & \mathsf{Spectral} \arrow[d, "(-)_{\mathrm{inv}}", "\wr"'] \\
\mathsf{DLat}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{Spectral}
\end{tikzcd}$$

が up to natural iso. で可換になる．よって spectral 空間 $X$ に対してその inverse 空間 $X_{\mathrm{inv}}$ をとる操作は，対応する分配束で順序を逆にする操作に対応している．

## 4 結びに

本記事は主に Dickmann-Schwartz-Tressel [DST19] の Chapter 1–3 を参考にした．[DST19] は spectral 空間を包括的に扱った初めての専門書である．

spectral 空間は，Stone [Sto37] によって初めて導入され，Hochster の博士論文で名づけられた．もともとは Stone が Brouwerian 論理を調べるために導入されたが，それ以降さまざまな spectral 空間の例が発見され，重要な位相空間のクラスであることがわかった．例えば，可換環の素スペクトラムは spectral 空間になる．実はこの逆も成り立ち，Hochster [Hoc69] はすべての spectral 空間がある可換環の素スペクトラムと同相であることが証明した．それゆえ，spectral 空間は可換環の素スペクトラムとして表せるような位相空間として特徴づけることもできる．その他，spectral 空間の歴史については [DST19] によくまとまっている．

Stone 双対性は，Stone によって 1936 年にブール代数とストーン空間に対する結果が示され ([Sto36])，翌 1937 年に分配束に拡張された ([Sto37])．Stone [Sto37] によれば同様の結果は，1937 年以前にも Birkhoff や MacNeille らによって得られていたらしい．これ以降，順序構造と位相空間の様々なクラスの間で双対性が調べられ，これらも広義に Stone 双対性と呼ばれることがある．分配束に対応する位相空間として本稿では spectral 空間を採用して解説したが，現在では Priestley 空間を用いることも多いようで，分配束と Priestley 空間の間の双対性は Priestley 双対とも呼ばれる．

順序構造をもつ対象と位相構造をもつ対象の間には多くの双対性があることが知られている．たとえば，

- 有限分配束のなす圏 FDLat と有限 poset のなす圏 FPos の間の双対性 (Birkhoff 双対)
- 完備 atomic ブール代数のなす圏 caBLat と集合のなす圏 Set の間の双対性 (Lindenbaum-Tarski 双対)
- ブール代数のなす圏 BLat とストーン空間のなす圏 Stone の間の双対性 (Stone 双対)
- 分配束のなす圏 DLat と Priestley 空間のなす圏 Pries の間の双対性 (Priestley 双対)
- Heyting 代数のなす圏 HA と Heyting 空間のなす圏 HS の間の双対性 (Heyting 双対)
- spatial frame のなす圏 SpFrm と sober 位相空間のなす圏 Sober の間の双対性
- frame のなす圏 Frm と位相空間のなす圏 Top の間の反変随伴

などが成り立つ．また spectral 空間や分配束は異なる見方で記述することも可能で，

- spectral 空間のなす圏 Spectral と Priestley 空間のなす圏 Pries は圏同型
- 分配束のなす圏 DLat と coherent frame のなす圏 CohFrm は圏同値

が知られている．これらと

- spectral 空間のなす圏 Spectral の自己関手 $(-)_{\mathrm{inv}}$ は圏同型 (Hochster 双対)

を合わせて，分配束に対する Stone 双対性は様々に表現できる．

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathsf{Top} & \underset{\perp}{\rightleftarrows} & \mathsf{Frm}^{\mathrm{op}} & & \\
 & & \cup & & \cup & & \\
 & & \mathsf{Sober} & \simeq & \mathsf{SpFrm}^{\mathrm{op}} & & \\
 & & \cup & & \cup & & \\
\mathsf{Pries} & \cong & \mathsf{Spectral} & \simeq & \mathsf{CohFrm}^{\mathrm{op}} & \simeq & \mathsf{DLat}^{\mathrm{op}} \\
 & & \cup & & & & \cup \\
 & & \mathsf{Stone} & & \simeq & & \mathsf{BLat}^{\mathrm{op}} \\
 & & \cup & & & & \cup \\
 & & \mathsf{Set} & & \simeq & & \mathsf{caBLat}^{\mathrm{op}}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\mathsf{Pries} & \simeq & \mathsf{DLat}^{\mathrm{op}} & \rightsquigarrow & \mathsf{HS} \simeq \mathsf{HA}^{\mathrm{op}} \\
\cup & & \cup & & \\
\mathsf{FPos} & \simeq & \mathsf{FDLat}^{\mathrm{op}} & &
\end{array}
$$

こうした双対性については，[Mor05] や [Koc07] に簡単にまとめられてある．より詳しくは，Johnstone [Joh82] や Dickmann-Schwartz-Tressel [DST19] を参照されたい ([Joh82] では spectral 空間を coherent 空間と呼んでいる)．

ブール代数とストーン空間の間の Stone 双対だけなら [ぺ 19a] にまとめてある．任意の spectral 空間がある可換環の素スペクトラムとして表せるという定理を含む Hochster の結果は [ぺ 19c] で解説予定である．

## 参考文献


[Sto36] M. Stone. “The theory of representations for Boolean algebras”. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40(1):37–111, 1936.

[Sto37] M. Stone. “Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics”. *Casopis, Mat. Fys., Praha, 67, 1–25 (1937)*, 1937.

[Hoc69] M. Hochster. “Prime ideal structure in commutative rings”. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 142:43–60, 1969.

[Joh82] P. T. Johnstone. *Stone spaces*, volume 3 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambrudge, 1986. Reprint of the 1982 edition.

[DST19] M. Dickmann, N. Schwartz, and M. Tressl. *Spectral spaces*. Cambridge University Press, 2019.

[Mor05] P. Morandi. “Dualities in Lattice Theory”. 2005. `http://sierra.nmsu.edu/morandi/notes/Duality.pdf`.

[Koc07] J. Kock. “Spectra, supports, and Hochster duality”. HOCAT talk (November 2007), and later to P. Balmer, G. Favi, and H. Krause (December 2007). `http://mat.uab.es/~kock/cat/spec.pdf`.

[SAG] J. Lurie. *Spectral Algebraic Geometry (Under Construction)*, version: February 3, 2018 update. Appendix A.1.
http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf.

[ペ 19a] ペーパー (@paper3510mm)．“Stone の表現定理”，ver. 2019 年 2 月 20 日．
https://paper3510mm.github.io/pdf/stone_rep.pdf.

[ペ 19c] ペーパー (@paper3510mm)．“Spectral 空間と Hochster の環構成”，in preparation．(Math Advent Calender 2019 (https://adventar.org/calendars/4297)，21 日目の記事の予定．)